

Politechnika Łódzka
Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki
Stosowanej
Instytut Informatyki

mgr inż. Jan Stolarek

Synteza falek ortogonalnych
na podstawie oceny
przetworzonego sygnału

Rozprawa doktorska
napisana pod kierunkiem
dr hab. inż. Liliany Byczkowskiej-Lipińskiej

Łódź 2011

Niewiedza znacznie częściej wywołuje uczucie pewności siebie niż posiadanie wiedzy: to właśnie osoby, których znajomość nauki jest niewielka, a nie te, które posiadają o niej rozległą wiedzę, są tak absolutnie przekonane o tym, że ten lub ów problem nie zostanie nigdy rozwiązany przez naukę.

Karol Darwin

Praca współfinansowana z grantu Dziekana Wydziału Fizyki Technicznej,
Informatyki i Matematyki Stosowanej, nr. I-1/283/11/Dz.S. plan 22

Spis treści

Wykaz oznaczeń	2
1 Wstęp	5
1.1 Przegląd literatury oraz uzasadnienie wyboru tematu	6
1.1.1 Synteza funkcji bazowych dyskretnego przekształcenia falko- wego	6
1.1.2 Adaptacja w algorytmach osadzania cyfrowych znaków wod- nych	12
1.2 Tezy pracy	17
1.3 Układ pracy	18
2 Definicja, właściwości i wybrane zastosowania dyskretnego prze- kształcenia falkowego	19
2.1 Definicje podstawowe	20
2.2 Aproksymacja wielorozdzielcza	22
2.3 Przekształcenie falkowe	26
2.4 Filtry cyfrowe	27
2.4.1 Efekty brzegowe	30
2.5 Synteza filtrów cyfrowych	31
2.5.1 Warunki idealnej rekonstrukcji sygnału	32
2.5.2 Warunki na filtr dolno i górnoprzepustowy	33
2.6 Dwuwymiarowe przekształcenie falkowe	35
2.6.1 Wieloetapowe przekształcenie falkowe dla obrazów	37
2.7 Wybrane rodziny falek	38
2.7.1 Falki Haara	38
2.7.2 Rodziny falek Daubechies, Coiflet i Symlet	43
2.8 Osadzanie cyfrowych znaków wodnych w dziedzinie DWT	48

2.8.1	Pojęcia podstawowe	48
2.8.2	Ogólny schemat algorytmu osadzania znaku wodnego w dziedzinie DWT	52
2.8.3	Algorytm osadzania i ekstrakcji znaku wodnego	54
2.9	Podsumowanie i wnioski	56
3	Parametryzacja falek ortogonalnych przy użyciu struktury kratowej	58
3.1	Dwupunktowa operacja bazowa	59
3.1.1	Ortogonalna dwupunktowa operacja bazowa	60
3.2	Struktura kratowa	62
3.2.1	Przekształcenie wieloetapowe przy użyciu struktury kratowej	64
3.3	Konwersja parametrów struktury kratowej na współczynniki filtrów	65
3.4	Realizacja dyskretnego przekształcenia falkowego przy użyciu ortogonalnej struktury kratowej	70
3.4.1	Symetryczne ortogonalne operacje bazowe	70
3.4.2	Asymetryczne ortogonalne operacje bazowe	85
3.5	Reprezentacja struktury kratowej gwarantująca spełnienie warunków na bank filtrów ortogonalnych	93
3.6	Podsumowanie i wnioski	96
4	Synteza falek na podstawie oceny przetworzonego sygnału	97
4.1	Ogólna idea syntezy falek na podstawie oceny przetworzonego sygnału	98
4.2	Synteza przekształceń falkowych do poprawy jakości cyfrowych znaków wodnych	100
4.2.1	Ocena jakości obrazu	102
4.3	Synteza falek ortogonalnych przy użyciu algorytmu ewolucyjnego . .	103
4.3.1	Ewolucyjna implementacja struktury kratowej	105
4.3.2	Struktura algorytmu ewolucyjnego	107
4.3.3	Ocena przystosowania osobników w zadaniu osadzania cyfrowych znaków wodnych	112
4.4	Ograniczenia zaproponowanej metody	113
4.5	Podsumowanie i wnioski	116

5	Wyniki badań eksperymentalnych	117
5.1	Badania dziedziny problemu	119
5.2	Synteza filtrów	128
5.3	Szybkość i skuteczność zastosowanego algorytmu ewolucyjnego . . .	144
5.4	Podsumowanie i wnioski	145
6	Podsumowanie i wnioski	147
A	Realizacja macierzowa przekształcenia falkowego	165
A.1	Struktura kratowa a macierzowa realizacja przekształcenia falkowego	168

Wykaz oznaczeń

Oznaczenia ogólne

- $\mathbf{a}$ - wektor (pogrubiona czcionka)
- a_k - k -ta próbka wektora a
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ - iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$
- ϕ - funkcja skalująca
- ψ - falka
- $\hat{i}$ - jednostka urojona
- A^T - transpozycja macierzy A
- $\bar{z}$ - sprzężenie zespolone liczby z
- $\bar{\mathbf{a}}$ - średnia wartość elementów wektora $\mathbf{a}$
- $a \bmod N$ - reszta z dzielenia a przez N

Zbiory liczb i operacje na zbiorach

- $\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych
- $\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych (łącznie z zerem)
- $\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych
- $\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych
- $\emptyset$ - zbiór pusty
- $cl(\cdot)$ - domknięcie zbioru

Funkcje

- $f(x)$ - funkcja zmiennej rzeczywistej
- $f[n]$ - funkcja zmiennej całkowitej
- f_n - wartość funkcji zmiennej całkowitej dla argumentu n
- $\|f(x)\|$ - norma funkcji $f(x)$
- δ_n - delta Kroneckera

Przesztrzenie funkcji

- $L^2(\mathbb{R})$ - przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem
- V_j - przestrzeń funkcji schodkowych o rozdzielczości 2^j
- W_j - przestrzeń funkcji falkowych o rozdzielczości 2^j

Filtracja falkowa

- $\mathbf{h}$ - dolnoprzepustowy filtr analizy
- $\mathbf{g}$ - górnoprzepustowy filtr analizy
- $\tilde{\mathbf{h}}$ - dolnoprzepustowy filtr syntezy
- $\tilde{\mathbf{g}}$ - górnoprzepustowy filtr syntezy
- $\mathbf{h}^{(L)}$ - filtr o długości L
- $LL^{(n)}$ - aproksymacja obrazu na n-tym etapie przekształcenia falkowego
- $LH^{(n)}$ - detal poziomy obrazu na n-tym etapie przekształcenia falkowego
- $HL^{(n)}$ - detal pionowy obrazu na n-tym etapie przekształcenia falkowego
- $HH^{(n)}$ - detal ukośny obrazu na n-tym etapie przekształcenia falkowego

Algorytmy ewolucyjne

- c_i - chromosom reprezentujący wartość kąta φ_i
- m - ilość bitów używana do reprezentacji jednego chromosomu
- P - populacja osobników w algorytmie genetycznym
- T - tymczasowa populacja osobników w algorytmie genetycznym

Osadzanie cyfrowych znaków wodnych

- κ - siła osadzenia
- $\mathbf{w}$ - znak wodny
- $\mathbf{c}$ - współczynniki falkowe wybrane do osadzenia znaku
- $\mathbf{c}^{(w)}$ - współczynniki falkowe zawierające osadzony znak wodny
- C - znormalizowana korelacja

Rozdział 1

Wstęp

Niniejsza rozprawa doktorska poświęcona jest dyskretnej transformacie falkowej (ang. *Discrete Wavelet Transform*, DWT) – narzędziu, które w ciągu ostatnich dwóch dekad zdobyło wielkie znaczenie w dziedzinie szeroko pojętego przetwarzania sygnałów. Transformata falkowa jest przekształceniem liniowym, podobnie jak dobrze znane w literaturze przedmiotu przekształcenie Fouriera (ang. *Discrete Fourier Transform*, DFT) czy kosinusowe (ang. *Discrete Cosine Transform*, DCT). Istotną cechą odróżniającą dyskretną transformatę falkową od innych przekształceń liniowych jest możliwość – a wręcz konieczność – swobodnego projektowania funkcji bazowych, co w przypadku wyżej wspomnianych przekształceń nie ma miejsca, gdyż ich funkcje bazowe są ściśle określone definicją¹. Zagadnienie syntezy falek jest więc w sposób naturalny wpisane w badania z dziedziny teorii falek. Autor niniejszej pracy pragnie zaproponować oryginalne, dotychczas niestosowane podejście do zadania syntezy funkcji bazowych dyskretnego przekształcenia falkowego. Głównymi innowacjami wyróżniającymi proponowany algorytm jest możliwość syntezy falek dla dowolnego algorytmu przetwarzania sygnału – również dla wieloetapowych algorytmów nieciągłych, na co nie pozwalały metody syntezy falek istniejące do tej pory w literaturze – oraz możliwość poprawy skuteczności syntezy falek względem dowolnie ustalonego kryterium oceny przetworzonego sygnału.

¹Należy tutaj nadmienić, że możliwe jest konstruowanie przekształceń adaptacyjnych na podstawie grafów szybkich przekształceń Fouriera i kosinusowego, patrz np. [58, 90, 91].

1.1 Przegląd literatury oraz uzasadnienie wyboru tematu

1.1.1 Synteza funkcji bazowych dyskretnego przekształcenia falkowego

Początki współczesnej teorii falek sięgają połowy lat 80-tych XX wieku. W tym okresie w literaturze poświęconej przetwarzaniu sygnałów intensywnie rozwijane było zaproponowane w połowie lat 70-tych zagadnienie kwadraturowych filtrów lustrzanych (ang. *Quadrature Mirror Filters*, QMF) [23, 37]. Bank filtrów składa się z pary filtrów² gwarantujących idealną rekonstrukcję sygnału [39, 120]. Charakterystyki widmowe takiej pary filtrów dobierane były tak, aby rozdzielać sygnał wejściowy na dwa sygnały o nienakładających się pasmach częstotliwości. Istotny wkład w rozwój badań nad kwadraturowymi filtrami lustrzanymi wniósł Vaidyanathan. W [116] wprowadził on struktury kratowe³ do realizacji filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej (ang. *Finite Impulse Response*, FIR). Wykazał również, że stanowią one skuteczną metodę parametryzacji i implementacji filtrów QMF. W kolejnym artykule Vaidyanathan i Hoang [118] wykazali, że struktura kratowa gwarantuje idealną rekonstrukcję (ang. *Perfect Reconstruction*, PR) sygnału, bez względu na kwantyzację współczynników, co czyni tę strukturę idealną do celów optymalizacji. Jako przykład zastosowania autorzy skonstruowali funkcję celu, która prowadzi do syntezy filtrów tłumiących wybrane zakresy częstotliwości. Dzięki niej możliwe było uzyskanie banku złożonego z filtrów dolno i górnoprzepustowego. Jako algorytm optymalizacji autorzy wykorzystali metodę gradientową DFP, przy czym w celu zagwarantowania jej zbieżności zastosowano dodatkowy algorytm wyliczania przybliżonego rozwiązania początkowego. Struktury kratowe okazały się również dobrze nadawać do implementacji sprzętowej, co wykazali Denk i Parhi [31, 32]⁴.

²W literaturze można znaleźć rozważania poświęcone bankom złożonym z arbitralnie ustalonej liczby filtrów, patrz np. [17, 41, 102, 112, 116, 117].

³Pojęcie “struktury kratowej” i “filtrów kratowych” to terminy obecnie powszechnie stosowane w literaturze przetwarzania sygnałów (patrz np. [57, 136]). Termin “kratowy” wywodzi się od wyglądu grafu tych filtrów i nie należy go mylić z innymi, podobnie brzmiącymi terminami pojawiającymi się w innych dziedzinach nauk ścisłych.

⁴Kwestia przydatności struktur kratowych w implementacji sprzętowej bywa jednak kwestionowana przez niektórych badaczy, patrz np. [19].

Równolegle do prac nad kwadraturowymi filtrami lustrzanymi pojawiły się pierwsze artykuły uznawane za początek współczesnej teorii falek [8, 67, 77], jednak kamieniem milowym w rozwoju teorii okazały się prace prowadzone przez Ingrid Daubechies [24, 25, 26, 27] i Stéphane Mallata [71, 72, 73]. Związek pomiędzy teorią falek a kwadraturowymi filtrami lustrzanymi został bardzo szybko dostrzeżony: każda funkcja skalująca (funkcja bazowa przekształcenia falkowego) wraz z odpowiadającą jej falką tworzą bank kwadraturowych filtrów lustrzanych, jednak przeciwna zależność nie musi być prawdziwa [33, 93, 114, 122]. Stworzona teoria opisywała przekształcenie liniowe różniące się w sposób istotny od dobrze znanych i powszechnie stosowanych do przetwarzania sygnałów przekształceń Fouriera i kosinusowego. Dzięki zastosowaniu funkcji bazowych o ograniczonym nośniku – w przeciwieństwie do DFT i DCT, których funkcje bazowe są oparte o funkcje sinus i kosinus o nośniku nieskończonym – możliwa stała się lokalizacja składowych sygnału nie tylko w częstotliwości, ale również w czasie. Co więcej, teoria nie definiowała jednego zestawu funkcji bazowych. Zamiast tego określone zostały ogólne warunki dotyczące ortogonalności bądź biortogonalności funkcji bazowych, ich unormowania oraz charakterystyki widmowej. Warunki nałożone przez teorię pozostawiają część stopni swobody wolnych, co implikuje istnienie nieskończenie wielu możliwych funkcji bazowych dyskretnego przekształcenia falkowego. Te stopnie swobody wykorzystywane są do projektowania funkcji bazowych DWT. Podejściem zastosowanym przez Daubechies do konstruowania falek było unieruchomienie dostępnych stopni swobody poprzez wprowadzenie dodatkowych równań. W ten sposób powstały rodziny ortogonalnych falek Daubechies (maksymalna ilość zerujących się momentów falki) oraz rodzina ortogonalnych falek Coiflet (maksymalna symetria⁵). Stały się one dla wielu badaczy punktem wyjścia do konstruowania innych funkcji bazowych.

Zagadnienie syntezy falek stało się tym samym jednym z kluczowych elementów praktycznego zastosowania teorii falkowej. Uwaga badaczy skupiła się na takim doborze falki, aby można było za jej pomocą optymalnie reprezentować oraz kompresować sygnały, w szczególności obrazy. Problem optymalnej aproksymacji rozważali Tewfik i inni [112], demonstrując metody konstruowania falek minimalizujących błąd aproksymacji dla zadanej dokładności reprezentacji (ilości poziomów analizy sygnału). Zagadnienie stało się także przedmiotem badań Gopinatha i in-

⁵W przypadku falek ortogonalnych nie jest możliwa idealna symetria [26].

nych [41]. Poruszyli oni dwa problemy: jakie jest optymalne rozwinięcie falkowe dla danego sygnału oraz jakie jest optymalne rozwinięcie falkowe dla ustalonej klasy sygnałów. Pierwszy z problemów jest tym samym który rozwiązywał Tewfik i inni, jednak Gopinath i inni wskazują, że metoda Tewfika generuje rozwiązania suboptymalne. Gopinath i inni przeprowadzają swoje rozważania dla ogólnego przypadku banku złożonego z M filtrów falkowych. Zauważają, że problem minimalizacji błędu aproksymacji sygnału jest uzależniony jedynie od współczynników filtra falkowego. W celu numerycznego projektowania falek autorzy zastosowali parametryzację Householdera [13] oraz algorytm optymalizacji gradientowej BFGS.

Desarte i inni [33] rozważali problem adaptacji falki do optymalnego kodowania obrazów. W celu parametryzacji falki wykorzystali oni strukturę kratową, a jako kryterium optymalizacji wprowadzili minimalizację wariancji wyjścia jednego z filtrów. Prowadziło to automatycznie do syntezy filtrów dolno i górnoprzepustowego. Problem optymalnego doboru filtrów do falkowej reprezentacji obrazu analizował również Unser [114]. Zauważył on, że wymaganie minimalizacji błędu aproksymacji sygnału jest równoważne maksymalizacji energii sygnału wychodzącego z filtra dolnoprzepustowego. Unser uczynił przy tym zastrzeżenie, że minimalizacja błędu aproksymacji ma sens jedynie w przypadku stosowania kodowania z globalną strategią kwantyzacji.

Antonini i inni [5] przeanalizowali wpływ charakterystyki falki na jej skuteczność w zadaniu kompresji i kodowania obrazu⁶. Wyciągają oni ogólny wniosek, że istotny wpływ na jakość obrazu zrekonstruowanego po kompresji mają ilość zerujących się momentów falki oraz jej regularność (gładkość). Wpływ regularności falki na jej skuteczność w przetwarzaniu sygnałów został jednak uznany przez Veterreliego i Herley'a [121] za kwestię otwartą. Problem był również badany przez Villasenora i innych [122]. Przeanalizowali oni skuteczność falek zaproponowanych w literaturze w zadaniu kompresji obrazu. Układ analizy-syntezy

⁶Zagadnienie falkowej kompresji obrazu jest tematem rozległym. Oprócz oczywistego znaczenia filtrów falkowych zastosowanych do dekompozycji obrazu istotne znaczenie ma również użyta strategia kwantyzacji oraz metoda kodowania. Ze względu na specyfikę falkowej analizy obrazu (patrz podrozdział 2.6) zaproponowanych zostało wiele algorytmów kodowania współczynników falkowych. Wśród najważniejszych należy wymienić klasyczny już Embedded Zero-tree Wavelet (EZW [98]), Set Partitioning In Hierarchical Trees (SPIHT [95]) czy będący podstawą kodowania w standardzie JPEG2000 [3] koder Embedded Block Coding with Optimal Truncation (EBCOT [110]).

sygnału potraktowano jako system liniowy, przy czym przed przystąpieniem do syntezy sygnału zerowane były współczynniki górnoprzepustowe rozwinięcia falkowego. Autorzy badali odpowiedź impulsową oraz skokową takiego układu i na ich podstawie byli w stanie efektywnie wnioskować o skuteczności falki w kompresji obrazu. Zwrócili oni uwagę, że wykładnik Höldera (ang. *Hölder exponent*), będący współczynnikiem mierzącym regularność (gładkość) funkcji, nie jest wystarczający aby zagwarantować wysoką skuteczność w zadaniu kompresji obrazu. Zauważają również, że filtr syntezy ma większy wpływ na jakość zrekonstruowanego obrazu niż filtr analizy oraz filtry o parzystej długości odpowiedzi impulsowej lepiej radzą sobie z zachowywaniem detali w postaci impulsów⁷. Zauważają również, że przekładanie skuteczności danego filtra w przetwarzaniu sygnału jednowymiarowego na przypadek dwuwymiarowy jest nieuzasadnione, gdyż nie da się przewidzieć współzależności pomiędzy składowymi pionowymi i poziomymi odpowiedzi impulsowych⁸. Należy nadmienić, że pomimo iż cytowane tutaj klasyczne artykuły pochodzą sprzed kilkunastu lat, zagadnienie oceny skuteczności filtrów pozostaje nadal aktualne. Przykładem może być model, zaproponowany w 2010 roku przez Gaofenga i innych [40], który pozwala przewidzieć z wysoką dokładnością jakość obrazu skompresowanego przy użyciu przekształcenia falkowego, bez konieczności wykonywania kwantyzacji, kodowania oraz transformacji odwrotnej. Wykorzystywana jest jedynie informacja o średniej jasności obrazu, odchyleniu standardowym jasności pikseli, koncentracji energii przez przekształcenie falkowe oraz entropii współczynników rozwinięcia falkowego. Badania autorów artykułu potwierdzają, że kluczowym czynnikiem mającym wpływ na skuteczność danej falki w kompresji obrazów jest jej zdolność koncentracji energii. Tym samym ich model stanowi rozszerzenie wcześniejszego podejścia do oceny skuteczności filtrów w zadaniu kompresji opartego jedynie o koncentrację energii [114].

Pomimo zakwestionowania skuteczności stosowania wykładnika Höldera do oce-

⁷W przypadku falek ortogonalnych, będących tematyką tej pracy, filtry syntezy i analizy są tożsame i mają odpowiedź impulsową parzystej długości. Sytuacja taka nie ma miejsca w przypadku falek biortogonalnych – filtry syntezy i analizy są różne i mogą mieć odpowiedzi impulsowe różnych, również nieparzystych, długości.

⁸Dyskretne przekształcenie falkowe jest uogólniane na przypadek dwuwymiarowy poprzez zastosowanie algorytmu wiersze-kolumny, stosowanego również do uogólnia na przypadek dwuwymiarowy jednowymiarowych przekształceń DFT i DCT. Szczegółowy opis algorytmu znajduje się w podrozdziale 2.6.

ny skuteczności filtrów falkowych, był on później stosowany przez niektórych autorów. Przykładem może być tutaj praca Langa i Hellera [64], którzy pokazali, że dzięki zrezygnowaniu z zerowania się momentów w falkach z rodziny Daubechies i zastosowaniu optymalizacji numerycznej można uzyskać falki gładzsze w sensie Höldera. Ideę porzucenia warunku na zerowanie się momentów falki wykorzystali również Odegard i Burrus [82]. Pozostawili oni warunek zerowania się kilku najniższych momentów, natomiast pozostałe stopnie swobody posłużyły do uzyskania wartości bliskich zeru dla większej ilości momentów wyższych rzędów. W ten sposób uzyskano falki, które wprawdzie radzą sobie gorzej od falek Daubechies z reprezentacją wielomianów niższych stopni, ale za to są w stanie lepiej aproksymować wielomiany stopni wyższych. W innym z artykułów [83] Odegard i Burrus demonstrują metodę syntezy falek biortogonalnych przeznaczonych do kompresji obrazów opartą o minimalizację dyskretnej skończonej wariancji (ang. *Discrete Finite Variation*, DFV [84]), będącej uogólnieniem miary gładkości funkcji na przypadek dyskretny. Jest to możliwe dzięki spostrzeżeniu, że w praktyce nie ma znaczenia nieskończona gładkość falki, a jedynie gładkość dla skończonej liczby poziomów aproksymacji sygnału. Wei i inni [130, 131] przedstawili uogólnioną wersję falek z rodziny Coiflet. Poprzez porzucenie warunków na zerowanie się momentów falki w zerze uzyskali oni dodatkowe stopnie swobody, które pozwoliły na numeryczną adaptację charakterystyki falki: poprawę symetryczności oraz charakterystyki fazowej filtra.

Rieder i inni [93] zademonstrowali efektywną implementację falek ortogonalnych przy wykorzystaniu struktur kratowych. Zastosowanie struktury kratowej do implementacji falek wymagało nałożenia dodatkowych warunków, co wynika bezpośrednio z wcześniej wspomnianej zależności, że nie każdy filtr QMF jest filtrem falkowym. Wprowadzona przez Riedera i innych reprezentacja struktury kratowej gwarantowała, że realizowany przez nią filtr QMF będzie jednocześnie falką. Autorzy rozważają kilka kryteriów optymalizacji numerycznej: zwartość nośnika, regularność, charakterystykę częstotliwościową (podobnie jak wcześniejszy badacze wnioskuje o konieczności minimalizacji energii wyjścia filtra górnoprzepustowego) i symetrię. W swojej implementacji autorzy artykułu wykorzystali algorytm COR-DIC [123], co pozwoliło w sposób znaczący zredukować liczbę operacji arytmetycznych potrzebnych do obliczenia transformaty. Podkreślają również znaczenie faktu, że w zastosowaniach praktycznych gładkość falki ma znaczenie jedynie dla

skończonej liczby poziomów analizy sygnału.

Jak widać z przedstawionego powyżej przeglądu literatury, w dotychczas stosowanych metodach syntezy falek wyróżnić można dwa zasadnicze podejścia. Pierwszym jest optymalizacja funkcji bazowych przekształcenia falkowego pod względem pewnego ustalonego przez eksperta kryterium, np. gładkości lub symetrii. Zakłada się więc, że jeśli funkcja bazowa będzie posiadać pewną arbitralnie ustaloną cechę, to dzięki temu będzie osiągać dobre wyniki w wybranym zastosowaniu przetwarzania sygnałów. Podkreślić należy jednak, że pośród badaczy brak jest zgodności co do tego która to cecha falki miałyby jednoznacznie zagwarantować jej optymalność w wybranym zastosowaniu przetwarzania sygnałów. Pamiętać należy również, że nawet jeśli udałooby się taką cechę ustalić, to tak zsyntezowana falka może być optymalna jedynie w sensie statystycznym dla ustalonej klasy sygnałów. Drugie z dotychczas stosowanych podejść jest lepsze: falka jest dobierana tak, aby jak najlepiej aproksymować⁹ wybrany sygnał bądź klasę sygnałów. Zaleta takiego podejścia jest podwójna. Po pierwsze, można adaptować falkę tylko do jednego, wybranego sygnału, zamiast dla całej ich klasy. Taka możliwość nie była jednak do tej pory w literaturze rozwijana i uznawana za istotną. Druga z zalet, to rezygnacja z arbitralnych założeń co do charakterystyki samej funkcji falkowej i zastąpienie ich przez założenia dotyczące charakterystyki przetworzonego sygnału. Założenie jak najdokładniejszej aproksymacji sygnału jest jednak uzasadnione tylko w przypadku projektowania falek przeznaczonych do kompresji. Ponadto, choć koncentracja energii jest istotna, to stanowi ona tylko pierwszy etap algorytmu kompresji. Po nim następuje jeszcze kwantyzacja i kodowanie, których wpływ na końcowy efekt uzyskiwany przez algorytm kompresji jest całkowicie pomijany na etapie projektowania falki. Tym samym ten sposób syntezy falek nie uwzględnia w pełni specyfiki algorytmu kompresji sygnału.

Zdaniem autora niniejszej rozprawy podejście oparte o rezygnację z apriorycznych założeń dotyczących charakterystyki funkcji falkowej i wprowadzenie założeń dotyczących oczekiwanych charakterystyk przetworzonego sygnału oraz adaptacja falki do konkretnego sygnału, zamiast do całej ich klasy, stanowią podejście o dużym potencjale, który dotychczas nie był wykorzystywany. Proponuję, aby zrezygnować z apriorycznych, czysto heurystycznych założeń dotyczących pożądanej

⁹Kryterium jak najdokładniejszej aproksymacji sygnału jest równoważne kryterium koncentracji energii przez filtr dolnoprzepustowy.

charakterystyki funkcji bazowej przekształcenia falkowego, a zamiast tego dokonywać syntezy falki stosując jako kryterium optymalności jedynie ocenę przetworzonego sygnału. W ten sposób możliwe będzie dostosowanie falki do charakterystyki aktualnie przetwarzanego sygnału oraz realizowanego algorytmu przetwarzania. Na słuszność takiego podejścia wskazują wyniki z przywołanego już wcześniej artykułu Gaofenga i innych [40], z którego wynikało że w zadaniu kompresji obrazu znaczenie ma koncentracja energii przez przekształcenie falkowe, charakterystyka przetwarzanego sygnału oraz – dotychczas pomijana we wszystkich podejściach do syntezy przekształceń falkowych – charakterystyka sygnału po wykonaniu transformaty falkowej, w tym wypadku entropia współczynników falkowych, mająca wpływ na proces kwantyzacji i kodowania. Proponowane podejście, dzięki zastosowaniu niegradientowych metod globalnego przeszukiwania funkcji celu, pozwoli na syntezę przekształceń falkowych pod kątem algorytmów, dla których nie było to wcześniej możliwe.

1.1.2 Adaptacja w algorytmach osadzania cyfrowych znaków wodnych

Osadzanie cyfrowych znaków wodnych w obrazach w dziedzinie dyskretnego przekształcenia falkowego posłuży za przykładowe zagadnienie z dziedziny przetwarzania sygnałów, które może zostać ulepszone poprzez dostosowanie funkcji bazowej przekształcenia falkowego. Poniższy przegląd literatury ma na celu umiejscowienie badań autora w kontekście dotychczas prowadzonych badań nad adaptacją algorytmów osadzania cyfrowych znaków wodnych oraz wskazanie na nowatorstwo proponowanego podejścia. W pracach związanych z osadzaniem cyfrowych znaków wodnych pojęcie adaptacji spotykane jest bardzo powszechnie. Praktycznie każdy algorytm proponowany w tej dziedzinie jest w jakimś sensie adaptacyjny, przy czym większość proponowanych rozwiązań adaptuje albo siłę albo miejsce osadzenia znaku. Stosowane są różne kryteria adaptacji. Jednym z najczęściej wykorzystywanych jest HVS (ang. *Human Visual System*), czyli minimalizacja zniekształceń wywołanych osadzeniem znaku na podstawie wiedzy dotyczącej funkcjonowania ludzkiego narządu wzroku. Opisane poniżej algorytmy dotyczą osadzania znaku w dziedzinie DWT, chyba że zaznaczono inaczej.

Hu i Kwong [52] zaproponowali algorytm osadzania widocznego znaku wodnego, w którym adaptowali siłę osadzenia znaku przy użyciu o HVS. Osadzanie

odbywało się zarówno w pasmach detali jak i aproksymacji. Autorzy zauważają, że ludzkie oko jest bardziej czułe na zmiany jasności w środkowym zakresie skali szarości i w rejonach o niskiej częstotliwości, a następnie wykorzystują oszacowania tych charakterystyk oznaczanego obrazu w celu dobrania siły osadzenia. Nie konstruują algorytmu ekstrakcji znaku, ponieważ znak z założenia ma być widoczny. Huang i Shi [55] zastosowali adaptację siły osadzenia w dziedzinie blokowego DCT przy wykorzystaniu HVS. Bloki przydzielane były do jednej z trzech klas w zależności od średniej jasności i intensywności tekstur. Dla każdej klasy stosowano inną siłę osadzenia odpowiadającą wrażliwości ludzkiego oka na zniekształcenia dla danego typu obszarów. Inną metodę adaptacji zaproponowali Kim i inni [61]. Oznaczają oni wszystkie pasma z wyjątkiem detali pierwszego poziomu. Dla każdego z pasm wyliczają jego energię, a następnie dobierają długość znaku proporcjonalnie do tej energii. Siła osadzenia dobierana jest na podstawie HVS poprzez użycie *modulation transfer function* – funkcji określającej wrażliwość ludzkiego oka na zmiany jasności. Pasma aproksymacji jest oznaczane przy użyciu stukrotnie mniejszego współczynnika osadzenia niż pozostałe pasma. Podobne podejście zastosował Serdean i inni [97] w zaproponowanym algorytmie osadzania cyfrowego znaku wodnego w sekwencjach filmowych – współczynniki aproksymacji były oznaczane z mniejszą siłą niż współczynniki detali.

Druga grupa algorytmów adaptacyjnych opiera się o dobór miejsca osadzenia znaku. Cvejic i Seppänen zaprezentowali algorytm oznaczania dźwięku adaptujący się do charakterystyki przeprowadzonego ataku. Badano jak atak wpływa na współczynniki transformaty Fouriera oznaczanego sygnału. Następnie znak osadzany był w tych współczynnikach, które zostały najmniej zmienione w wyniku ataku. Jako przykłady ataków wykorzystali kompresję MP3 oraz filtrację dolno-przepustową. Grupa chińskich badaczy, w skład której weszli Huang, Wang i Pan oraz inni, zaprezentowała kilka algorytmów adaptacyjnego wyboru miejsca osadzenia znaku w dziedzinie blokowego DCT z wykorzystaniem algorytmu ewolucyjnego [53, 54, 99]. Jako kryterium optymalizacji w [54, 99] stosowana była poprawa jakości oznaczonego medium (obraz bądź film) oraz odporność na ataki (kompresja JPEG, filtracja medianowa). Autorzy demonstrują, że ich metoda daje lepsze wyniki niż osadzanie w losowych współczynnikach DCT¹⁰ oraz że najbardziej od-

¹⁰Zdaniem autora niniejszej rozprawy jest to błąd autorów w/w artykułów – należy oczekiwać, że osadzenie znaku w zupełnie przypadkowych miejscach da złe wyniki, a tym samym bardzo łatwo jest uzyskać jakikolwiek lepszy wynik.

powiednie do osadzania są współczynniki odpowiadające środkowym częstotliwościom – stanowi to potwierdzenie powszechnego w literaturze założenia, że przy osadzaniu cyfrowego znaku wodnego w dziedzinie DWT należy oznaczać środkowe pasma częstotliwości, czyli pasma detali pomiędzy 3 a 5 poziomem analizy falkowej. W [53] autorzy skupili się na optymalizacji jakości medium oraz maksymalizacji separowalności¹¹, kwestię ataków pominięto. W każdym z artykułów problem optymalizacji wielokryterialnej był przekształcany na problem optymalizacji jednokryterialnej poprzez ważenie poszczególnych kryteriów. Autorzy [53] rozważają zastosowanie kryteriów optymalizacji opartych o HVS w przyszłych badaniach. Usman i inni [115] przedstawili koncepcję wyboru oznaczanych współczynników DCT przy użyciu algorytmu ewolucyjnego w celu poprawy jakości oznaczonego obrazu oraz zwiększenia skuteczności wykrywania modyfikacji obrazu. Hsu i Wu [50] zaproponowali niesłupy algorytm osadzania znaku wodnego, w którym dokonywana jest permutacja osadzanego znaku na podstawie charakterystyki oznaczanego obrazu, tak by zminimalizować zniekształcenia widziane przez ludzkie oko. Goyal i inni [44] zaproponowali koncepcję doboru miejsca osadzenia znaku wodnego w dziedzinie czasu w celu optymalizacji odporności znaku i jakości oznaczonego obrazu. Koncepcja została zrealizowana częściowo przez Goyala i Gupta [43], którzy zaprezentowali ewolucyjny algorytm doboru miejsca osadzenia w celu poprawy jakości obrazu, pomijając jednak zagadnienie poprawy odporności znaku, pomimo wcześniejszego teoretycznego pomysłu.

W literaturze istnieją także algorytmy adaptacyjne niedające zakwalifikować się do dwóch powyższych kategorii. Amiri i Jamzad [4] zademonstrowali ulepszenie algorytmu zaproponowanego przez Davoine [30]. Algorytm opiera się o wybór trójek współczynników z pasm detali i modyfikację ich odchylenia standardowego z zależności od pewnych parametrów. Te parametry są dobierane za pomocą algorytmu ewolucyjnego. Autorzy zauważają, że odporność na ataki (robustness) i jakość oznaczonego obrazu to dwa sprzeczne kryteria i stosują algorytm ewolucyjny NSGA-II do optymalizacji wielokryterialnej parametrów algorytmu osadzania. Nie używają przy tym operatora krzyżowania, a jedynie operator mutacji. Reprezentacja osobników jest rzeczywistoliczbowa: dwa geny reprezentują rozwiązanie, a dwa pozostałe parametry mutacji (nie jest stosowana samoadaptacja). Autorom

¹¹Definicja separowalności oraz pozostałych terminów związanych z osadzaniem cyfrowych znaków wodnych znajduje się w podrozdziale 2.8.1 na stronie 48.

udaje się uzyskać poprawę odporności na ataki przy zachowaniu podobnych wartości jakości obrazu PSNR. Nakamoto i inni [81] zastosowali algorytm ewolucyjny do generowania klucza prywatnego wykorzystywanego przy osadzeniu znaku. Kryterium syntezy klucza była poprawa odporności na ataki (jako przykład wybrano kompresję JPEG oraz szum).

Powyższy przegląd adaptacyjnych algorytmów osadzania cyfrowych znaków wodnych oraz zaprezentowany w podrozdziale 1.1.1 przegląd literatury dotyczącej dyskretnego przekształcenia falkowego pozwalają wyciągnąć bardzo istotny wniosek. O ile w przypadku zadania falkowej kompresji sygnału zagadnienie doboru optymalnego filtra zostało bardzo szybko uznane za kluczowe, o tyle w badaniach nad osadzaniem cyfrowych znaków wodnych problem ten pozostał prawie niezauważony. Pierwszymi, którzy zauważyli związek pomiędzy użytym filtrem a jakością oznaczonego obrazu i skutecznością ekstrakcji byli Hsu i Wu [50], jednak ich badania w żaden sposób nie analizowały tego spostrzeżenia. Niektórzy autorzy rozpoznali możliwość sparametryzowania filtra w celu poprawy bezpieczeństwa osadzonego znaku (parametry filtra pełnią rolę klucza prywatnego). Meerwald i Uhl [76] zaproponowali losowanie parametrów falki w celu uodpornienia znaku przeciwko szeroko rozumianym atakom protokołowym, mającym na celu usunięcie znaku. Zastosowanie losowego filtra ma uniemożliwiać identyfikację współczynników w których osadzono znak. Zauważają, że podejście może być zastosowane w już istniejących algorytmach osadzania cyfrowych znaków wodnych, ponieważ wymaga tylko podmiany współczynników falki. Autorzy wykorzystują parametryzację, która nie gwarantuje spełnienia warunków na filtry dolno i górnoprzepustowy, co zmusza ich do zastosowania dodatkowej miary gładkości falek, ograniczającej przestrzeń dostępnych kluczy prywatnych (parametrów falki). Pomysł ten został opisany bardziej szczegółowo w późniejszym artykule Deitla, Meerwalda i Uhla [34]. Bardzo podobny pomysł zaprezentowali Huang i Jiang [56]. Zastosowali oni parametryzację opartą na strukturze kratowej w wersji opisanej w książce Burrusa i innych [13]. Nie wprowadzili jednak dodatkowych warunków, co w praktyce czyni stosowane przez nich filtry kwadraturowymi filtrami lustrzanymi, nie zaś falkami. Autorzy zauważają, że można próbować dobrać parametry filtra tak, aby poprawić jakość oznaczonego obrazu. Idea zwiększania bezpieczeństwa znaku poprzez losowanie filtrów pojawia się również w artykule Wanga i innych [127], przy czym autorzy losują na każdym etapie rozkładu inną parę filtrów. Samo drzewo rozkładu również jest

losowane, tzn. możliwa jest analiza innego pasma niż aproksymacji $A^{(j)}$. W trakcie przeprowadzania eksperymentów demonstrujących skuteczność zaproponowanego algorytmu autorzy czynią bardzo ważne spostrzeżenie – wybrana para filtrów ma istotny wpływ na korelację wyekstrahowanego znaku wodnego. Pomimo zauważenia tak istotnego faktu, autorzy nie dostrzegają możliwości optymalizacji filtra w celu maksymalizacji korelacji. Zamiast tego decydują się jedynie na wylosowanie innej pary filtrów, jeśli uzyskana przez nich korelacja jest ich zdaniem zbyt niska. Cheng i Yang [16] zaproponowali parametryzację dwuwymiarowego filtra falkowego, opartą o koncepcję struktury kratowej, w celu uniemożliwienia ekstrakcji znaku przez niepowołaną osobę. Wartości parametrów były losowane, przy czym wartość ostatniego z parametrów dobierano tak, aby zagwarantować, że utworzony filtr jest falką. Autorzy zademonstrowali poprawę skuteczności działania algorytmu zaproponowanego wcześniej przez nich samych [134].

Analiza wpływu filtrów użytych do wykonania dekompozycji obrazu na skuteczność osadzania znaku wodnego i jakość oznaczonego obrazu była analizowana przez dwa zespoły. Miyazaki [79, 80] analizuje problem wyboru najlepszego filtra do osadzania znaku wodnego algorytmem addytywnym (detekcja oparta o korelację) w dziedzinie DWT. Jako kryteria oceny przyjmuje jakość oznaczonego obrazu (fidelity) i odporność znaku na ataki (robustness). Autor czyni pewne założenia statystyczne: znak wodny traktowany jest jako szum, który po odwrotnym przekształceniu DWT wprowadza zakłócenie do obrazu. Z kolei atak traktowany jest jako szum wprowadzany do znaku. Na podstawie tych założeń Miyazaki przeprowadza teoretyczną analizę i wyprowadza wzory, które pokazują, że charakterystyka użytego filtra wpływa zarówno na siłę zniekształceń wprowadzonych do obrazu jak i na skuteczność detekcji po ataku. Dietze i Jassim [35] również podjęli się analizy wpływu filtrów na proces osadzania i ekstrakcji znaku wodnego. Ich podejście było czysto praktyczne. Przetestowali oni cztery falki ortogonalne i siedem falek biortogonalnych znanych z literatury. Do testów użyli nieślepego algorytmu addytywnego oraz ślepego, kwantyzacyjnego algorytmu SCS zaproponowanego przez Eggersa i innych [36]. Autorzy zbadali wpływ ilości poziomów analizy (osadzanie odbywało się w pasmach detali najwyższego poziomu dekompozycji obrazu) oraz kompresji na jakość obrazu (wyrażoną jako MSE) i skuteczność detekcji. Badania pokazały, że wybór ilości poziomów ma istotne znaczenie – falki oferujące np. dobrą jakość detekcji przy dwóch poziomach analizy zupełnie nie sprawdzają się na trzecim poziomie. Dietze i Jassim dochodzą do wniosku, że nie jest możliwe wska-

zanie jednej falki, którą można by uznać za optymalną jeśli chodzi o odporność na ataki, choć można wskazać falki nieco lepiej radzące sobie pod względem jakości obrazu. Autorzy zauważają pewne ogólne prawidłowości, np. falki biortogonalne nieco lepiej sprawdzają się w algorytmach addytywnych niż falki ortogonalne jeśli chodzi o jakość obrazu, choć z drugiej strony falki ortogonalne lepiej sprawdzają się w detekcji po przeprowadzeniu ataku kompresją JPEG. W przypadku kompresji DWT, autorzy sugerują, że zastosowanie do osadzania tych samych falek co do kompresji może dawać dobre wyniki.

Na podstawie powyższego przeglądu literatury widać, że pomimo zauważenia przez kilku badaczy wpływu filtrów na skuteczność działania algorytmów osadzania znaków wodnych, nie został podjęty temat syntezy filtrów pod kątem poprawy tej skuteczności. Zdaniem autora spowodowane to było przede wszystkim brakiem metod umożliwiających skuteczną syntezę falek pod kątem tego zastosowania, co zostało uzasadnione w podrozdziale 1.1.1. Autor pragnie w ramach niniejszej rozprawy opracować metodę syntezy falek do poprawy jakości osadzania cyfrowych znaków wodnych. Jako kryterium optymalności falek wykorzystana zostanie ocena charakterystyki przetworzonego sygnału. Podejście to uzasadnione jest złożonością problemu, wynikającą z nieciągłego charakteru algorytmu osadzania cyfrowego znaku wodnego oraz potrzeby adaptacji falki do konkretnego obrazu, algorytmu osadzania i zestawu znaków wodnych. Sprawia to, że niemożliwym wydaje się ustalenie kryteriów, których spełnienie przez funkcje bazowe przekształcenia falkowego zapewniłoby realizację kluczowych wymagań stawianych w zadaniu osadzania cyfrowych znaków wodnych. Ponieważ postawiony problem jest problemem nieciągłym, nie jest możliwe stosowanie do jego rozwiązania gradientowych metod optymalizacji i konieczne staje się zastosowanie niegradientowych metod globalnego przeszukiwania funkcji celu.

1.2 Tezy pracy

Na podstawie powyższego przeglądu i analizy literatury autor niniejszej rozprawy formułuje następujące tezy:

Teza 1 : Zastosowanie oceny przetworzonego sygnału jako kryterium optymalności pozwala na syntezę falek skuteczniejszych w wybranym zastosowaniu przetwarzania sygnału, niż falki zaproponowane do tej pory w literaturze.

Teza 2 : Falki zsyntezowane na podstawie oceny przetworzonego sygnału adaptują się do charakterystyki sygnału wejściowego.

1.3 Układ pracy

Struktura dalszej części pracy jest następująca: Rozdział 2 zawiera podstawową teorię dotyczącą dyskretnego przekształcenia falkowego oraz osadzania cyfrowych znaków wodnych w dziedzinie tego przekształcenia. Rozdział 3 prezentuje strukturę kratową jako wybraną metodę parametryzacji ortogonalnego dyskretnego przekształcenia falkowego. Zawarto w nim analizę właściwości struktury kratowej wraz z autorskim dowodem jej zgodności z istniejącą teorią falkową. Rozdziały 4 i 5 prezentują oryginalne dokonania autora rozprawy. Rozdział 4 opisuje proponowaną ideę syntezy falek w oparciu o ocenę przetworzonego sygnału i demonstruje jej zastosowanie w odniesieniu do problemu osadzania cyfrowych znaków wodnych w obrazach. Rozdział ten omawia również algorytm ewolucyjny syntezy funkcje bazowe dyskretnego przekształcenia falkowego poprzez globalne przeszukiwanie zdefiniowanej funkcji celu. Rozdział 5 zawiera wyniki badań eksperymentalnych zaproponowanych metod i algorytmów. Przeanalizowano w nim dziedzinę problemu oraz efektywność zaproponowanej metody syntezy falek w zagadnieniu osadzania cyfrowych znaków wodnych. Zsyntezowane falki porównano z falkami zaproponowanymi dotychczas w literaturze, wykazując skuteczniejsze działanie tych pierwszych. Rozdział 6, kończący rozprawę doktorską, podsumowuje uzyskane wyniki i wyciągnięte wnioski, a także omawia perspektywy dalszych badań. Dodatek A opisuje macierzową realizację dyskretnego przekształcenia falkowego.

Rozdział 2

Definicja, właściwości i wybrane zastosowania dyskretnego przekształcenia falkowego

Niniejszy rozdział stanowi teoretyczny fundament prezentowanej rozprawy. Zostaną w nim wprowadzone podstawowe definicje i właściwości dyskretnego przekształcenia falkowego oraz omówione zostanie osadzanie cyfrowych znaków wodnych w dziedzinie dyskretnego przekształcenia falkowego.

Dyskretna transformata falkowa opisywana jest dwoma, praktycznie niezależnymi od siebie językami. Pierwszy z nich to język algebry liniowej, w którym opisuje się przekształcenie z wykorzystaniem pojęcia przestrzeni funkcji, a samą transformatę traktuje się jako rzutowanie elementu przestrzeni – sygnału – na jej bazę. Główną zaletą tego opisu jest obrazowe przedstawienie idei reprezentacji sygnału za pomocą współczynników transformaty. Temu opisowi poświęcone są trzy pierwsze podrozdziały. Podrozdział 2.1 wprowadza pojęcie funkcji skalującej, dylatacji, translacji, normy oraz definiuje rodziny funkcji skalujących i falkowych o jednokowej normie. Na ich podstawie w podrozdziale 2.2 przedstawiona zostaje idea reprezentacji wielorozdzielczej sygnału, poprzez rzutowanie go na bazy ortogonalnych przestrzeni funkcji stałych na przedziałach. Stanowi to podstawę do podania w podrozdziale 2.3 formalnej definicji prostego i odwrotnego dyskretnego przekształcenia falkowego. Druga metoda opisu transformaty falkowej oparta jest o język cyfrowej filtracji sygnału. Główną zaletą tego opisu jest łatwość przełożenia go na zastosowania praktyczne. Poświęcone są mu dalsze dwa podrozdziały. Podroz-

dział 2.4 wprowadza podstawowe definicje, wzory i właściwości związane z cyfrową filtracją sygnałów oraz demonstruje związek filtracji cyfrowej z dyskretnym przekształceniem falkowym sygnału. Podrozdział 2.5 omawia tradycyjne podejście do zagadnienia syntezy filtrów cyfrowych. Zdefiniowane zostają warunki, jakie musi spełniać para filtrów, aby można było mówić o banku filtrów ortogonalnych i aby możliwa była idealna rekonstrukcja oryginalnego sygnału. W niniejszej pracy dyskretne przekształcenie falkowe zostanie wykorzystane jako narzędzie przetwarzania obrazu, w związku z czym w podrozdziale 2.6 zaprezentowano uogólnienie wprowadzonych w podrozdziale 2.3 algorytmów na przypadek dwuwymiarowy. Podrozdział 2.7 omawia wybrane rodziny falek ortogonalnych znane z literatury: falki Haara oraz rodziny falek Daubechies, Coiflet i Symlet. Pierwsza z tych rodzin ma znaczenie historyczne oraz pozwala w sposób poglądowy wyjaśnić ideę dyskretnego przekształcenia falkowego. Pozostałe trzy rodziny falek mają duże znaczenie praktyczne, ze względu na ich wysoką skuteczność w przetwarzaniu sygnałów rzeczywistych. Podrozdział 2.8 wprowadza teorię związaną z cyfrowymi znakami wodnymi: pojęcia podstawowe, klasyfikację algorytmów osadzania, ogólny schemat osadzania znaku wodnego w dziedzinie DWT oraz szczegółowy opis użytego w pracy algorytmu osadzania i ekstrakcji znaku wodnego.

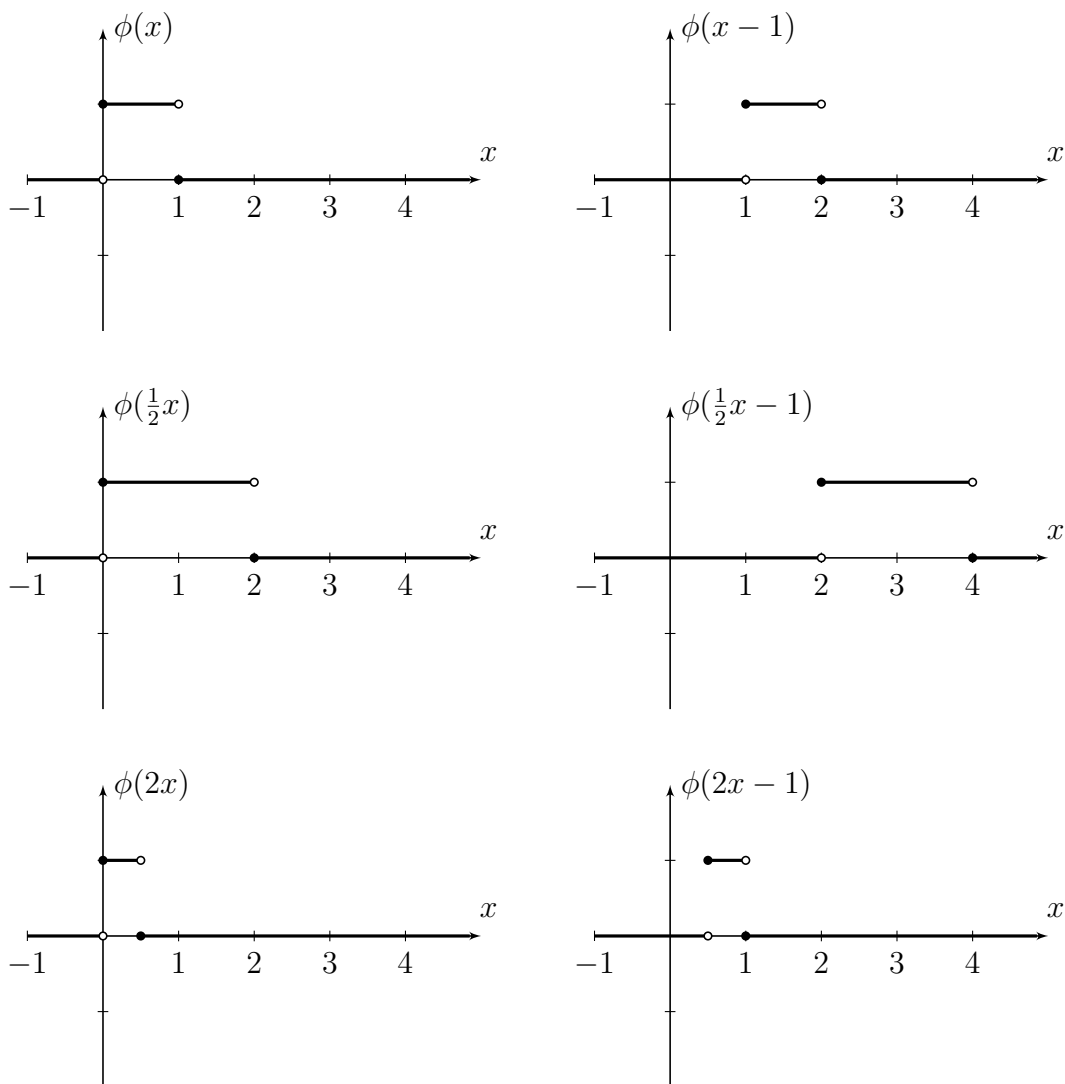
Wiedza przedstawiona w niniejszym rozdziale została opracowana na podstawie literatury [12, 13, 21, 60, 38, 73, 74, 101, 113, 119, 126, 132, 136] i stanowi przegląd teorii niezbędnej do zrozumienia dalszej części rozprawy. W celu zachowania przejrzystości wywodu pominięto dowody i wyprowadzenia wzorów dobrze znane w literaturze przedmiotu, zastępując je odpowiednimi odsyłaczami bibliograficznymi.

2.1 Definicje podstawowe

Niech dana będzie funkcja $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Będzie ona nazywana funkcją skalującą. Funkcja postaci:

$$\phi(x - n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

nazywana jest translacją funkcji $\phi(x)$. Liczba n nazywana jest współczynnikiem przesunięcia. Funkcja postaci:



Rysunek 2.1: Wpływ współczynnika skali i translacji na kształt funkcji skalującej.

$$\phi(kx), \quad k \in \mathbb{R}_+, \quad (2.2)$$

nazywana jest dylatacją funkcji $\phi(x)$. Liczba k nazywana jest współczynnikiem skali. Wpływ translacji i współczynnika skali na kształt funkcji $\phi(x)$ ilustruje Rysunek 2.1. Jeśli współczynnik skali zostanie przyjęty jako:

$$k = 2^j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

to każda zmiana wartości współczynnika j o 1 powoduje zmianę skali funkcji $\phi(x)$ o 2. Funkcje skonstruowane przy użyciu współczynnika skali wyrażonego równa-

niem (2.3) nazywane są diadycznymi, a przekształcenie falkowe zbudowane przy użyciu takich funkcji – diadycznym dyskretnym przekształceniem falkowym¹.

Normę funkcji należących do przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$ definiuje się jako:

$$\|f(x)\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4)$$

Niech funkcja $\phi(x)$ spełnia zależność

$$\|\phi(2^j x)\| = 2^{-j/2} \|\phi(x)\| \quad (2.5)$$

Dla tak określonej funkcji $\phi(x)$ definiuje się rodzinę funkcji skalujących $\phi_{j,n}(x)$ postaci

$$\phi_{j,n}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - n) \quad (2.6)$$

Na podstawie równania (2.5) widać, że wszystkie funkcje należące do rodziny $\phi_{j,n}(x)$ mają równe normy. Współczynnik $2^{j/2}$ nazywany jest współczynnikiem normalizującym. W dalszej części pracy zakłada się, że funkcja $\phi(x)$ ma jednostkową normę. Poprzez analogię do rodziny funkcji skalujących $\phi_{j,n}(x)$, definiuje się rodzinę funkcji falkowych $\psi_{j,n}(x)$:

$$\psi_{j,n}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - n) \quad (2.7)$$

Rodziny tak zdefiniowanych funkcji skalujących i falkowych wykorzystywane są w aproksymacji wielorozdzielczej sygnału, której poświęcony jest następny podrozdział.

2.2 Aproksymacja wielorozdzielcza

Niech dany będzie ciąg $d = [\dots, d_0, d_1, d_2, \dots]$ stanowiący wyniki pomiaru pewnej ciągłej wielkości fizycznej, dokonane z częstością 2^{-j} (na jednostkę czasu przypada 2^j próbek). Przejdźmy z reprezentacji dyskretniej, do reprezentacji funkcyjnej zakładając, że od chwili pomiaru sygnał nie zmienia swojej wartości, aż do momentu następnego pomiaru. Mówimy wtedy, że sygnał jest aproksymowany przez

¹W niniejszej pracy rozważane będzie tylko przekształcenie diadyczne. Tym samym wszystkie dalsze odniesienia do dyskretniej transformaty falkowej domyślnie odnoszą się do przekształcenia diadycznego.

funkcję schodkową o rozdzielczości 2^j . Oznaczmy przez V_j zbiór wszystkich funkcji stałych na przedziałach $[n2^{-j}, (n+1)2^{-j})$. Łatwo zauważyć, że

$$V_{j-1} \subset V_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

Uogólniając:

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \quad (2.9)$$

Prawdziwe są również następujące właściwości²:

$$\phi(x) \in V_j \Leftrightarrow \phi(2x) \in V_{j+1}, \quad (2.10)$$

$$\phi(x) \in V_j \Rightarrow \phi(x-n) \in V_j, \quad (2.11)$$

$$cl\left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j\right) = L^2(\mathbb{R}), \quad (2.12)$$

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \emptyset. \quad (2.13)$$

Definicja 2.1. Ciąg przestrzeni (V_j) , $j \in \mathbb{Z}$, spełniających właściwości (2.10) – (2.13) stanowi aproksymację wielorozdzielczą przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$.

Niech funkcja skalująca $\phi(x)$ należy do przestrzeni V_0 . Wtedy rodzina funkcji skalujących $\phi_{j,n}(x)$ określona równaniem (2.6) stanowi ortonormalną bazę przestrzeni V_j . Ponadto, znając bazę przestrzeni V_j , możliwe jest wyznaczenie bazy przestrzeni o wyższej rozdzielczości V_{j+1} . Każda funkcja bazowa przestrzeni V_{j+1} może zostać wyrażona za pomocą kombinacji liniowej funkcji bazowych przestrzeni V_j . Dla $j = 0$ można zapisać równanie:

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \cdot \phi(2x - n). \quad (2.14)$$

Jest to tzw. równanie dylatacyjne. Współczynniki $h_n, n \in \mathbb{Z}$ występujące w równaniu (2.14) są współczynnikami odpowiedzi impulsowej filtru dolnoprzepustowego $\mathbf{h}$ i odgrywają kluczową rolę w przetwarzaniu sygnałów z użyciem transformaty falkowej. W przypadku znajomości ortogonalnych funkcji $\phi(x)$, możliwe jest obliczenie współczynników h_n przy użyciu iloczynu skalarnego³:

²Patrz: [12], str. 91; [101], str. 212–213; [74], str. 300

³Wyprowadzenie wzoru: [101], str. 214

$$h_n = \langle \phi(x), \phi_{1,n}(x) \rangle . \quad (2.15)$$

Aproksymacji funkcji $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, z rozdzielczością 2^j dokonuje się poprzez rzutowanie jej na bazę przestrzeni V_j . Oznaczmy przez $f_j(x)$ rzut funkcji $f(x)$ na przestrzeń V_j . Niech $c_{j,n}$ będą współczynnikami rozwinięcia funkcji $f_j(x)$ w bazie przestrzeni V_j :

$$f_j(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} \phi_{j,n}(x) . \quad (2.16)$$

Współczynniki $c_{j,n}$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$c_{j,n} = \langle f_j(x), \phi_{j,n}(x) \rangle . \quad (2.17)$$

Znajomość współczynników rozwinięcia funkcji $f_j(x)$ w przestrzeni V_j pozwala na wyznaczenie współczynników rozwinięcia tej funkcji w przestrzeni V_{j-1} (przestrzeń o niższej rozdzielczości)⁴:

$$c_{j-1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \cdot c_{j,n} . \quad (2.18)$$

Ponadto, poprzez analogiczne wyprowadzenie, można uogólnić równanie (2.14) do postaci:

$$\phi_{j-1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \cdot \phi_{j,n}(x) . \quad (2.19)$$

Dla zbioru przestrzeni (V_j) spełniających właściwości (2.10) – (2.13) istnieje ortonormalna baza funkcji falkowych, taka że:

$$\forall_{f \in L^2(\mathbb{R})} \quad f_{j+1}(x) = f_j(x) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j,n} \psi_{j,n}(x) , \quad (2.20)$$

gdzie współczynniki $d_{j,n}$ definiuje się jako:

$$d_{j,n} = \langle f_j(x), \psi_{j,n}(x) \rangle . \quad (2.21)$$

Sumę $\sum_n d_{j,n} \psi_{j,n}(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, interpretuje się jako różnicę między aproksymacją funkcji $f(x)$ na poziomach rozdzielczości 2^j i 2^{j+1} . Tak więc funkcja $f_{j+1}(x)$, będąca rzutem $f(x)$ na przestrzeń o wyższej rozdzielczości, powstaje przez dodanie

⁴Wyprowadzenie wzoru: [101], str. 214–215

detali do rzutu funkcji $f(x)$ na przestrzeń o niższej rozdzielczości. Oznaczmy przestrzeń wyznaczoną przez rodzinę funkcji falkowych $\psi_{j,n}(x)$ jako W_j . Będzie ona nazywana przestrzenią falek. Rodzina funkcji $\psi_{j,n}(x)$ stanowi bazę ortonormalną tej przestrzeni. Przestrzeń V_{j+1} jest sumą prostą przestrzeni V_j i W_j , co zapisujemy jako:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j . \quad (2.22)$$

Stosując powyższe równanie rekurencyjnie, dla $k < j$ otrzymujemy:

$$V_j = V_k \oplus \bigoplus_{l=0}^{j-k-1} W_{k+l} . \quad (2.23)$$

Ponadto, na mocy twierdzeń algebry liniowej, prawdziwe są następujące właściwości:

$$V_j \cap W_j = \emptyset , \quad (2.24)$$

$$V_j \perp W_j , \quad (2.25)$$

$$\forall_{j \neq k} \quad W_j \perp W_k . \quad (2.26)$$

Na podstawie równania (2.23) można uogólnić równanie (2.20) do postaci

$$f_m(x) = f_k(x) + \sum_{j=k}^{m-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j,n} \psi_{j,n}(x) . \quad (2.27)$$

Analogicznie do równania (2.14) definiuje się równanie falkowe:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \cdot \phi(2x - n) , \quad (2.28)$$

które uogólnia się do postaci:

$$\psi_{j-1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \cdot \phi_{j,n}(x) . \quad (2.29)$$

Współczynniki $g_n, n \in \mathbb{Z}$, występujące w równaniu (2.28) są współczynnikami odpowiedzi impulsowej filtru górnoprzepustowego $\mathbf{g}$. Zagadnieniu wyznaczania wartości współczynników h_n i g_n poświęcony będzie podrozdział 2.5.

2.3 Przekształcenie falkowe

Ideą przekształcenia falkowego jest przejście od reprezentacji funkcji $f_j(x)$ za pomocą współczynników $(c_{j,n})$ (równanie (2.16)) do reprezentacji z wykorzystaniem współczynników $(c_{j-1,l})$, $(d_{j-1,l})$ w równaniu:

$$f_j(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j-1,l} \phi_{j-1,l}(x) + \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_{j-1,l} \psi_{j-1,l}(x) . \quad (2.30)$$

Po przyrównaniu prawych stron równań (2.16) oraz (2.30) i pomnożeniu skalarnym tak otrzymanego równania przez $\phi_{j-1,n}$ bądź $\psi_{j-1,n}$ otrzymujemy – na podstawie równania (2.19) – wzory transformacyjne przekształcenia falkowego wyrażone równaniem (2.18) oraz równaniem:

$$d_{j-1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \cdot c_{j,n} . \quad (2.31)$$

Podane wzory transformacyjne oznaczają, że wyznaczanie współczynników rozwinięcia falkowego na poziomie o niższej rozdzielczości dokonywane jest na podstawie współczynników tego rozwinięcia na poziomie o wyższej rozdzielczości. Proces ten odbywa się w sposób rekurencyjny, zgodnie z równaniami (2.18) i (2.31) i prowadzi do przekształcenia reprezentacji funkcji $f_j(x)$ do postaci:

$$f_j(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{n,l} \phi_{n,l}(x) + \sum_{m=n}^{j-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_{m,l} \psi_{m,l}(x) , \quad (2.32)$$

dla $j > n$, gdzie różnica $j - n$ określa ilość etapów dyskretnego przekształcenia falkowego. Procedura wyznaczania wielorozdzielczego rozwinięcia falkowego sygnału na podstawie równań (2.18) i (2.31) nazywana jest wieloetapowym przekształceniem falkowym, a schemat jej realizacji nazywany jest algorytmem Mallata [73].

Wzór na odwrotne przekształcenie falkowe otrzymuje się poprzez pomnożenie równania powstałego z przyrównania prawych stron równań (2.16) oraz (2.30) przez $\phi_{j,n}(x)$:

$$c_{j,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} c_{j-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} d_{j-1,k} . \quad (2.33)$$

Jego rekurencyjne zastosowanie pozwala na odtworzenie oryginalnej funkcji $f_j(x)$ na podstawie znajomości współczynników jej rozwinięcia falkowego $c_{n,k}$ i $d_{m,k}$, gdzie $m = n, \dots, j - 1$.

2.4 Filtry cyfrowe

W tym podrozdziale rozpatrzone zostanie alternatywne podejście do opisu dyskretnego przekształcenia falkowego – będzie to podejście wyrażone w języku filtracji cyfrowej. Filtr cyfrowy to układ posiadający wejście i wyjście. Na wejście podawany jest ciąg $\mathbf{x}$ w wyniku czego na wyjściu filtru otrzymuje się ciąg wyjściowy $\mathbf{y}$.

Definicja 2.2. *Delta Kroneckera to sygnał dyskretny dany wzorem:*

$$\delta_n = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Definicja 2.3. *Wielkość określająca szybkość powtarzania się zjawiska okresowego nazywana jest pulsacją i wyraża się w radianach na sekundę. Związek pomiędzy pulsacją ω , okresem T i częstotliwością f dany jest wzorem:*

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad . \quad (2.35)$$

Definicja 2.4. *Odpowiedzią impulsową układu nazywa się ciąg otrzymywany na wyjściu układu w wyniku pobudzenia go sygnałem wejściowym $\mathbf{x} = \delta_n$.*

Definicja 2.5. *Jednowymiarowy splot dyskretny $\mathbf{y}$ sygnałów $\mathbf{h}$ i $\mathbf{x}$ dany jest równaniem:*

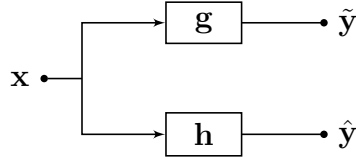
$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} \quad . \quad (2.36)$$

Splot stanowi efektywną metodę numerycznej realizacji filtracji cyfrowej w dziedzinie czasu. Do przetwarzania sygnałów z wykorzystaniem przekształcenia falkowego wykorzystuje się parę filtrów $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$ tworzących tzw. bank filtrów analizy (dekompozycji) sygnału. Filtr $\mathbf{h}$ opisany jest współczynnikami odpowiedzi impulsowej $[h_0, h_1, \dots, h_L]$ i nazywany jest filtrem dolnoprzepustowym (patrz równanie (2.18) na stronie 24). Filtr dolnoprzepustowy powinien przenosić składową stałą i tłumić składową o pulsacji π radianów⁵ [119, 136]. Filtr $\mathbf{g}$ opisany jest współczynnikami

⁵Zgodnie z definicją 2.3 składowa o pulsacji π radianów to składowa, której okres wynosi T (a zatem jej częstotliwość wynosi f). Zgodnie z twierdzeniem Kotelnikowa–Shannona jest to maksymalna częstotliwość możliwa do idealnego odtworzenia przy częstotliwości próbkowania $2f$ [14].

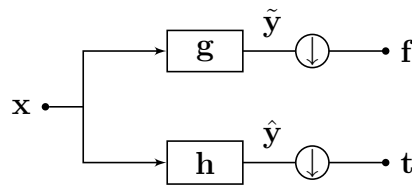
odpowiedzi impulsowej $[g_0, g_1, \dots, g_L]$ i nazywany jest filtrem górnoprzepustowym (patrz równanie (2.31) na stronie 26)). Filtr górnoprzepustowy powinien tłumić składową stałą i przenosić składową o pulsacji π . Dla filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej długości L równanie (2.36) przyjmuje postać⁶:

$$y_n = \sum_{k=0}^{L-1} h_k x_{n-k} . \quad (2.37)$$



Rysunek 2.2: Bank filtrów analizy sygnału.

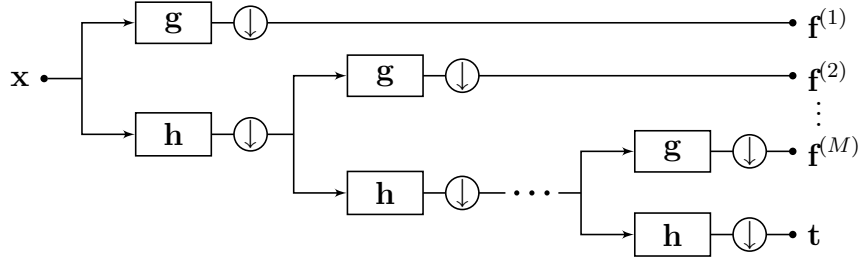
Sygnał wejściowy $\mathbf{x}$ przechodzi przez bank filtrów w sposób pokazany na Rysunku 2.2. W wyniku filtracji otrzymuje się dwa sygnały $\hat{\mathbf{y}}$ i $\tilde{\mathbf{y}}$, każdy o długości takiej samej jak sygnał wejściowy. Oznacza to, że do zakodowania sygnału po prze-filtrowaniu potrzeba dwa razy więcej liczb, niż przed filtracją. W celu zachowania takiej samej ilości liczb potrzebnych do zakodowania sygnału przed i po filtra-cji stosuje się decymację (przerzedzenie) sygnałów wychodzących z filtrów. Polega ona na usunięciu co drugiej próbki z sygnałów $\hat{\mathbf{y}}$ i $\tilde{\mathbf{y}}$. W praktyce decymacja nie jest realizowana. Zastępuje się ją przesuwaniem współczynników filtra względem sygnału co dwie próbki, co widać we wzorach transformacyjnych (2.18) i (2.31)



Rysunek 2.3: Bank filtrów analizy sygnału z decymatorami.

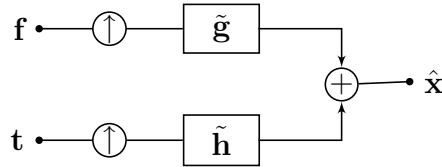
⁶Należy zauważyć, że jeśli odwróci się kolejność współczynników filtra, to operacja splotu staje się równoważna iloczynowi skalarnemu (patrz [119], str. 150). Ta właściwość wykorzystywana jest w realizacji macierzowej przekształcenia falkowego (patrz Dodatek A). Autor niniejszej rozprawy będzie stosował oznaczenia zgodne z realizacją macierzową, a więc filtracja realizowana będzie poprzez iloczyn skalarny współczynników filtra i odpowiedniego fragmentu sygnału. Tak więc współczynnik h_0 mnożony będzie z elementem x_i sygnału, współczynnik h_1 mnożony będzie z elementem x_{i+1} , itd.

jako współczynnik $2k$ w indeksie dolnym $n - 2k$ obu filtrów. Rysunek 2.3 pokazuje bank filtrów analizy z decymatorami oznaczonymi symbolem $\Downarrow$. Sygnał $\mathbf{t}$, będący wyjściem filtra dolnoprzepustowego, nazywany jest aproksymacją bądź trendem. Sygnał $\mathbf{f}$, będący wyjściem filtra górnoprzepustowego, nazywany jest detalem bądź fluktuacją.



Rysunek 2.4: Schemat wieloetapowego przekształcenia falkowego przy użyciu algorytmu Mallata.

Rysunek 2.4 pokazuje schemat realizacji algorytmu Mallata przy użyciu wielo-poziomowego zestawu filtrów. Sygnał $\mathbf{t}$, będący wyjściem filtra dolnoprzepustowego na M -tym poziomie analizy wielorozdzielczej, odpowiada współczynnikom skalującym $c_{n,k}$ w równaniu (2.32). Sygnały $\mathbf{f}^{(1)}, \dots, \mathbf{f}^{(M)}$, będące wyjściami filtrów górnoprzepustowych, odpowiadają współczynnikom falkowym $d_{j,k}$ w równaniu (2.32).



Rysunek 2.5: Bank filtrów syntezy sygnału z ekspanderami.

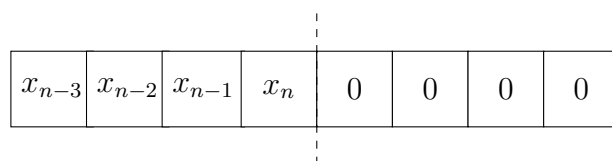
Rysunek 2.5 pokazuje bank filtrów syntezy sygnału, służący rekonstrukcji sygnału na podstawie dwóch przefiltrowanych i zdecydowanych sygnałów $\mathbf{t}$ i $\mathbf{f}$. Przy użyciu symbolu $\Uparrow$ oznaczono ekspander, czyli wstawienie zera pomiędzy każde dwie próbki sygnałów wejściowych.

Koniecznym jest takie skonstruowanie filtrów $\mathbf{h}$, $\mathbf{g}$, $\tilde{\mathbf{h}}$ i $\tilde{\mathbf{g}}$, aby zapewniały one idealną rekonstrukcję sygnału, a więc aby sygnał $\mathbf{x}$ był tożsamy z $\hat{\mathbf{x}}$ (z dokładnością do przesunięcia w czasie). Zagadnieniu syntezy filtrów poświęcony jest podrozdział 2.5.

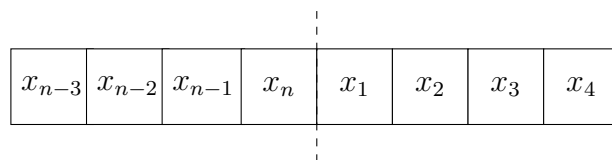
2.4.1 Efekty brzegowe

W przypadku filtrów, których długość L jest większa niż 2, pojawia się problem efektów brzegowych. Wynika on z tego, że przy obliczaniu współczynników rozwinięcia falkowego dla ostatnich elementów sygnału skończonego, filtr – teoretycznie – powinien wyjść poza sygnał. Nie jest to oczywiście możliwe. Istnieją różne rozwiązania tego problemu. Jako najpopularniejsze należy wymienić:

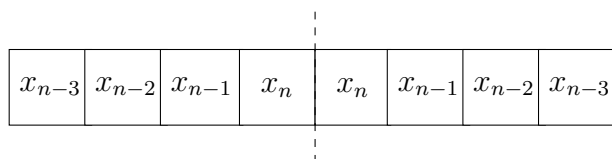
1. **uzupełnienie zerami:** sygnał zostaje przedłużony za pomocą zer (Rysunek 2.6a),
2. **założenie okresowości sygnału:** w przypadku, gdy filtr powinien wyjść poza ostatni element sygnału, następuje jego “zawinięcie” w taki sposób, że koniec filtra obejmuje początkowe elementy sygnału (Rysunek 2.6b),
3. **odbicie lustrzane na końcu sygnału:** sygnał zostaje przedłużony na końcu za pomocą swojego lustrzanego odbicia (Rysunek 2.6c).



(a) uzupełnienie zerami



(b) założenie okresowości sygnału



(c) odbicie lustrzane na końcu

Rysunek 2.6: Ilustracja efektów brzegowych. Linia przerywana oznacza koniec sygnału.

W niniejszej rozprawie, jako rozwiązanie problemu efektów brzegowych przyjęto założenie okresowości sygnału.

2.5 Synteza filtrów cyfrowych

Tradycyjna metoda syntezy filtrów cyfrowych jest oparta na opisie ich właściwości w dziedzinie częstotliwości oraz w dziedzinie transformaty $\mathcal{Z}$. Tym samym konieczne jest wprowadzenie podstawowych definicji związanych z analizą częstotliwościową.

Definicja 2.6. Transformata Fouriera ciągu $x[n]$ dana jest wzorem

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot e^{-jn\omega} . \quad (2.38)$$

Definicja 2.7. Transformata $\mathcal{Z}$ ciągu $x[n]$ dana jest wzorem

$$\mathcal{Z}x[n] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot z^{-n} . \quad (2.39)$$

Definicja 2.8. Transformata Fouriera odpowiedzi impulsowej filtru

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} h_n \cdot e^{-jn\omega} \quad (2.40)$$

nazywana jest charakterystyką częstotliwościową filtru bądź transmitancją.

Charakterystyka częstotliwościowa filtru jest funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej ω . Dlatego też w celu zobrazowania jej właściwości rozpatruje się jej moduł (*charakterystyka amplitudowa*) i fazę (*charakterystyka fazowa*).

Definicja 2.9. Filtry dolno i górnoprzepustowy spełniające warunek

$$|H(\omega)|^2 + |G(\omega)|^2 = 2 \quad (2.41)$$

tworzą bank filtrów ortogonalnych.

Twierdzenie 2.1. Splot dwóch ciągów w dziedzinie czasu równoważny jest iloczynowi ich transformat w dziedzinie transformaty $\mathcal{Z}$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x} \Rightarrow Y(z) = H(z) \cdot X(z) . \quad (2.42)$$

Twierdzenie 2.2. Niech dany będzie ciąg dyskretny $x[n]$ i niech $\mathcal{S}^{-k}x[n]$ oznacza ciąg otrzymany w wyniku przesunięcia ciągu $x[n]$ o k okresów próbkowania w prawo. Przesunięcie ciągu wejściowego w prawo o k próbek w dziedzinie czasu odpowiada mnożeniu przez z^{-k} w dziedzinie przekształcenia $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}\mathcal{S}^{-k}x[n] = z^{-k}\mathcal{Z}x[n] . \quad (2.43)$$

2.5.1 Warunki idealnej rekonstrukcji sygnału

Aby możliwa była idealna rekonstrukcja sygnału z użyciem filtrów $\mathbf{h}$, $\mathbf{g}$, $\tilde{\mathbf{h}}$ i $\tilde{\mathbf{g}}$, ich transformaty $\mathcal{Z}$ muszą spełniać następujące równania⁷:

$$H(z) \cdot \tilde{H}(z) + G(z) \cdot \tilde{G}(z) = 2 \quad , \quad (2.44)$$

$$H(-z) \cdot \tilde{H}(z) + G(-z) \cdot \tilde{G}(z) = 0 \quad . \quad (2.45)$$

W przypadku spełnienia powyższych równań, sygnał $\hat{\mathbf{x}}$ zrekonstruowany przez bank filtrów syntezy $\tilde{\mathbf{h}}$, $\tilde{\mathbf{g}}$ będzie identyczny z oryginalnym sygnałem $\mathbf{x}$, przefiltrowanym przy użyciu banku filtrów analizy $\mathbf{h}$, $\mathbf{g}$. Jeśli dopuścić opóźnienie sygnału $\hat{\mathbf{x}}$ względem sygnału $\mathbf{x}$ o l przedziałów próbkowania, to równania (2.44) i (2.45) przyjmują postać:

$$H(z) \cdot \tilde{H}(z) + G(z) \cdot \tilde{G}(z) = 2z^{-l} \quad , \quad (2.46)$$

$$H(-z) \cdot \tilde{H}(z) + G(-z) \cdot \tilde{G}(z) = 0 \quad . \quad (2.47)$$

W tak zdefiniowanych równaniach występują cztery nieznane filtry. Z praktycznego punktu widzenia wyznaczenie filtrów, które spełniałyby powyższe warunki nie jest więc czynnością elementarną. Z równań (2.46) i (2.47) można jednak wyznaczyć zależności pomiędzy filtrami $\mathbf{h}$, $\mathbf{g}$, $\tilde{\mathbf{h}}$ i $\tilde{\mathbf{g}}$, które pozwalają na przekształcenie tych równań do postaci⁸:

$$H(z) \cdot \tilde{H}(z) - H(-z) \cdot \tilde{H}(-z) = 2 \quad , \quad (2.48)$$

$$G(z) = -z^{-(2n+1)} \cdot \tilde{H}(-z) \quad , \quad (2.49)$$

$$\tilde{G}(z) = z^{2n+1} \cdot H(-z) \quad , \quad (2.50)$$

gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Zadanie syntezy banku filtrów zostało w ten sposób sprowadzone do znalezienia pary filtrów $\mathbf{h}$ i $\tilde{\mathbf{h}}$ spełniających równanie (2.48), a następnie wyznaczenia filtru $\mathbf{g}$, korzystając z równania (2.49), i filtru $\tilde{\mathbf{g}}$, korzystając z równania (2.50).

Dalszą redukcję ilości nieznanymi filtrów można osiągnąć poprzez wprowadzenie dodatkowej zależności między filtrami analizy:

⁷Wyprowadzenie wzorów: [101], str. 233–235

⁸Wyprowadzenie wzorów: [101], str. 235–237

$$G(z) = z^{-1}H(-z^{-1}) . \quad (2.51)$$

Przyjmując dodatkowo $z = e^{j\omega}$, równanie (2.48) przekształca się do postaci⁹:

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2 . \quad (2.52)$$

Zadanie syntezy filtrów zostaje w ten sposób sprowadzone do znalezienia filtru $\mathbf{h}$ spełniającego równanie (2.52), a następnie wyznaczenie pozostałych trzech filtrów z zależności:

$$G(\omega) = e^{-j\omega} \overline{H(\omega + \pi)} , \quad (2.53)$$

$$\tilde{H}(\omega) = \overline{H(\omega)} , \quad (2.54)$$

$$\tilde{G}(\omega) = e^{j\omega} H(\omega + \pi) . \quad (2.55)$$

Jeśli filtry zostały wyznaczone przy użyciu równań (2.52) – (2.55), to utworzony przez nie bank filtrów analizy/syntezy nazywany jest bankiem filtrów ortogonalnych. Zależności w dziedzinie częstotliwości określone równaniami (2.53) – (2.55) mogą zostać wyrażone w dziedzinie czasu, tj. bezpośrednio za pomocą współczynników odpowiedzi impulsowych filtrów:

$$g_{L-n-1} = (-1)^{n+1} h_n , \quad (2.56)$$

$$\tilde{h}_{L-n-1} = h_n , \quad (2.57)$$

$$\tilde{g}_n = (-1)^{n+1} h_n . \quad (2.58)$$

Z powyższych równań wynika, że filtry syntezy powstają przez lustrzane odbicie filtrów analizy, a filtry górnoprzepustowe powstają przez odwrócenie kolejności i zmianę znaku co drugiego współczynnika analogicznych filtrów dolnoprzepustowych.

2.5.2 Warunki na filtr dolno i górnoprzepustowy

W niniejszym podrozdziale podane zostaną warunki, jakie muszą spełniać filtry $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$, aby można było nazywać je, odpowiednio, filtrem dolnoprzepustowym i filtrem górnoprzepustowym. Na podstawie równania (2.52) dowodzi się¹⁰, że:

⁹Wyprowadzenie wzoru: [12], str. 93–95; [101], str. 238

¹⁰Patrz: [101], str. 246; [136], str. 445

$$\sum_{n=0}^{L-1} h_n h_{n+2m} = \delta_m . \quad (2.59)$$

Podstawiając $m = 0$ do powyższego równania otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{L-1} h_n^2 = 1 , \quad (2.60)$$

co oznacza, że filtr dolnoprzepustowy musi być unormowany. Dla $m \neq 0$ otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{L-1} h_n h_{n+2m} = 0 , \quad (2.61)$$

a więc przesunięcia filtru o 2 muszą być względem siebie ortogonalne¹¹. Na podstawie tego równania dowodzi się również, że liczba współczynników skończonej odpowiedzi impulsowej filtru ortogonalnego musi być parzysta¹². Pamiętając o założeniu, że funkcja skalująca $\phi(x)$ ma jednostkową normę, na podstawie równania dyfazyjnego (2.14), wykazuje się¹³ prawdziwość zależności:

$$\sum_{n=0}^{L-1} h_n = \sqrt{2} . \quad (2.62)$$

Filtr $\mathbf{h}$ spełniający powyższe równanie przenosi składową stałą. Jeśli ma on również nie przenosić składowej o pulsacji π radianów, to spełniony musi być warunek

$$\sum_{n=0}^{L-1} (-1)^n h_n = 0 . \quad (2.63)$$

Analogicznie, na podstawie równania falkowego (2.28), wyznacza się zależność, jaką muszą spełniać współczynniki filtru górnoprzepustowego:

$$\sum_{n=0}^{L-1} g_n = 0 , \quad (2.64)$$

przy czym zależność ta jest automatycznie spełniona dla filtrów ortogonalnych, a więc takich w których filtr górnoprzepustowy powstaje przez odwrócenie kolejności współczynników filtru dolnoprzepustowego i ich modulację sygnałem $(-1)^n = e^{i\omega\pi}$, zgodnie z równaniem (2.56):

¹¹Uwzględniając równanie (2.60) można mówić o ortonormalności.

¹²Patrz: [101], str. 246; [136], str. 445

¹³Patrz: [101], str. 216; [136], str. 444

$$g_n = \pm(-1)^n h_{L-n-1} \quad , \quad (2.65)$$

gdzie $n = 0, \dots, L-1$, a L to długość filtru. Modulacja współczynników filtru dolnoprzepustowego sygnałem $(-1)^n = e^{i\omega\pi}$ powoduje przesunięcie pulsacji środkowej widma Fouriera filtru dolnoprzepustowego z 0 do π , co czyni go filtrem górnoprzepustowym¹⁴. Zależność (2.65) interpretuje się następująco: aby otrzymać filtr górnoprzepustowy, należy odwrócić kolejność współczynników filtru dolnoprzepustowego, a następnie zmienić znak co drugiego współczynnika.

Na mocy równania (2.25) wymaga się, aby funkcja skalująca $\phi(x)$ była ortogonalna do falki $\psi(x)$ i jej całkowitych przesunięć:

$$\sum_{n=0}^{L-1} h_n g_{n+2m} = 0 \text{ dla } m \in \mathbb{Z} \quad . \quad (2.66)$$

Jeżeli filtr h_n spełnia warunek (2.59) oraz filtr g_n powstaje na podstawie równania (2.65), to warunki (2.64) i (2.66) są automatycznie spełnione. Zostanie to udowodnione w podrozdziale 3.4.

Jak więc zostało pokazane, projektowanie banku ortogonalnych filtrów falkowych może zostać sprowadzone do wyznaczenia współczynników filtru h_n spełniających poniższy układ równań:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{L-1} h_n = \sqrt{2} \\ \sum_{n=0}^{L-1} h_n h_{n+2m} = \delta_m \quad \text{dla } m = 0, 1, 2, \dots, \frac{L}{2} - 1 \end{cases} \quad . \quad (2.67)$$

Jest to układ $\frac{L}{2} + 1$ równań z L niewiadomymi co oznacza, że dla $L > 2$ otrzymuje się więcej niewiadomych niż równań. Powstające w ten sposób stopnie swobody wykorzystuje się w procesie projektowania filtra.

2.6 Dwuwymiarowe przekształcenie falkowe

W niniejszej rozprawie dyskretne przekształcenie falkowe zostanie wykorzystane jako narzędzie przetwarzania obrazów. Tym samym konieczne jest uogólnienie jednowymiarowego przekształcenia falkowego, opisanego w podrozdziale 2.3, na przypadek dwuwymiarowy. Niech obraz cyfrowy będzie reprezentowany w postaci

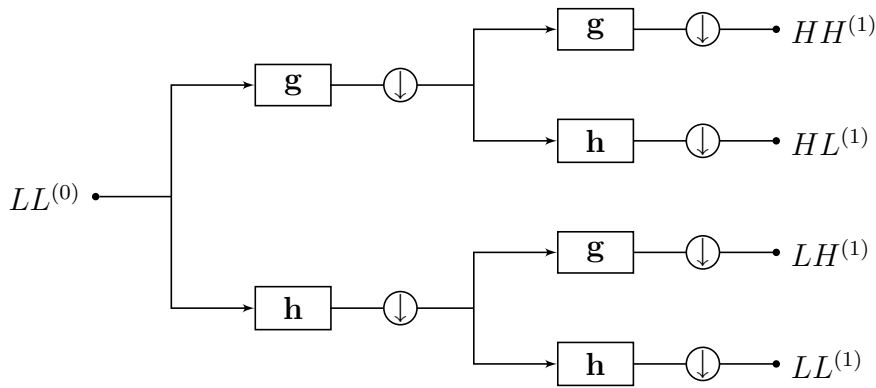
¹⁴Patrz: [136], str. 446.

macierzy kwadratowej $LL^{(0)}$, o wymiarach $N \times N$, gdzie N jest potęgą dwójki. Dwuwymiarowe przekształcenie falkowe transformuje macierz $LL^{(0)}$ do postaci

$$\begin{bmatrix} LL^{(1)} & LH^{(1)} \\ HL^{(1)} & HH^{(1)} \end{bmatrix},$$

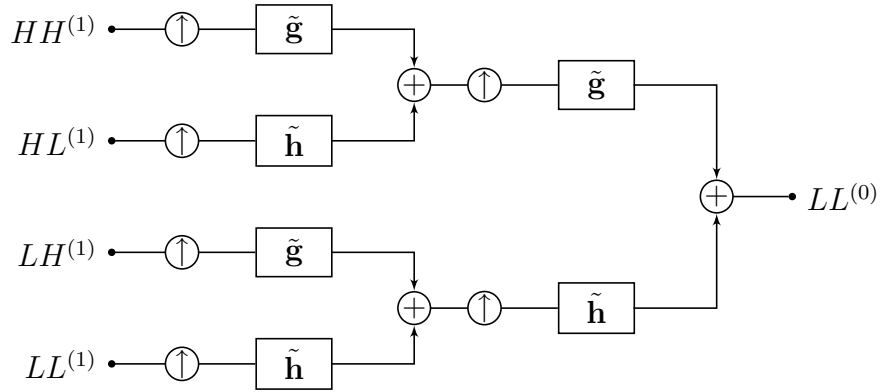
gdzie podmacierze $LL^{(1)}$, $LH^{(1)}$, $HL^{(1)}$ i $HH^{(1)}$ mają wymiary $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$. Dekompozycja macierzy $LL^{(0)}$ na cztery podmacierze realizowana jest zgodnie ze schematem na Rysunku 2.7. Na wejście układu filtrów $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$ podawana jest wierszami macierz $LL^{(0)}$. Wiersze tej macierzy są splatane z filtrami, a następnie podawane do decymatorów w sposób analogiczny do przetwarzania sygnału jednowymiarowego opisanego w podrozdziale 2.4. Na wyjściu decymatorów otrzymywane są macierze o N wierszach i $\frac{N}{2}$ kolumnach. Macierze te są następnie podawane kolumnami na wejście kolejnego układu filtrów. Po przefiltrowaniu i ponownej decymacji otrzymywane są cztery macierze wynikowe o wymiarach $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$, przy czym to którą macierz otrzymamy zależy od kolejności zastosowania filtrów $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$. Macierze $LL^{(1)}$, $LH^{(1)}$, $HL^{(1)}$ i $HH^{(1)}$ nazywane są odpowiednio: aproksymacją pierwszego poziomu, detalem poziomym pierwszego poziomu, detalem pionowym pierwszego poziomu i detalem ukośnym pierwszego poziomu¹⁵.

W celu rekonstrukcji obrazu $LL^{(0)}$ na podstawie macierzy $LL^{(1)}$, $LH^{(1)}$, $HL^{(1)}$ i $HH^{(1)}$ wykonuje się procedurę odwrotną zgodnie ze schematem na Rysunku 2.8. Cztery macierze podawane są wierszami na wejścia ekspanderów, które wstawiają zero pomiędzy każde dwa elementy wiersza. Tak rozszerzone sygnały splatane są



Rysunek 2.7: Falkowa dekompozycja obrazu.

¹⁵W polskiej literaturze można zetknąć się również z terminami składowa pozioma, składowa pionowa i składowa diagonalna.

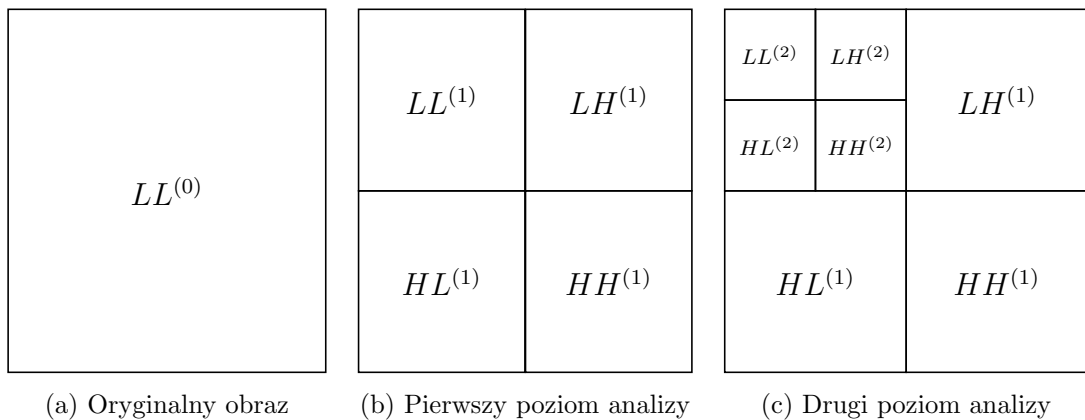


Rysunek 2.8: Falkowa rekonstrukcja obrazu.

z odpowiednimi filtrami, na których wyjściu pojawiają się macierze o $\frac{N}{2}$ wierszach i N kolumnach. Macierze te są dodawane do siebie i podawane kolumnami na wejście dwóch kolejnych ekspanderów. Na wyjściach tych ekspanderów pojawiają się macierze z kolumnami długości N , przy czym co drugi element tych kolumn ma wartość zero. Macierze te są splatane są z odpowiednimi filtrami, zaś macierze wychodzące z filtrów są dodawane, tworząc macierz $LL^{(0)}$.

2.6.1 Wieloetapowe przekształcenie falkowe dla obrazów

W celu wykonania wieloetapowego przekształcenia falkowego obrazu, opisany w podrozdziale 2.3 algorytm Mallata uogólnia się na przypadek dwuwymiarowy. Na każdym kolejnym etapie dekompozycji dokonywany jest rozkład aproksymacji $LL^{(j)}$ na macierze $LL^{(j+1)}$, $LH^{(j+1)}$, $HL^{(j+1)}$ i $HH^{(j+1)}$. Zostało to schematycznie przedstawione na Rysunku 2.9.



Rysunek 2.9: Wieloetapowa dekompozycja (analiza) obrazu.

Rekonstrukcja (synteza) obrazu przeprowadzana jest poczynając od ostatniego etapu dekompozycji sygnału. Korzystając z macierzy $LL^{(j)}$, $LH^{(j)}$, $HL^{(j)}$ i $HH^{(j)}$, rekonstruowana jest macierz aproksymacji $LL^{(j-1)}$ z poziomu wcześniejszego. W połączeniu z macierzami $LH^{(j-1)}$, $HL^{(j-1)}$ i $HH^{(j-1)}$ pozwala ona na rekonstrukcję aproksymacji $LL^{(j-2)}$. Proces jest powtarzany do momentu uzyskania pierwotnego obrazu $LL^{(0)}$.

2.7 Wybrane rodziny falek

Do chwili obecnej w literaturze zaproponowano bardzo wiele rodzin ortogonalnych funkcji falkowych o różnych właściwościach. Poniżej omówione zostaną wybrane rodziny. Pierwsza to rodzina falek Haara [48], historycznie najstarsza, gdyż zaproponowana już w 1910 roku przez węgierskiego matematyka Alfréda Haara. Istotną zaletą tego najprostszego systemu falkowego jest łatwość zademonstrowania przy jego użyciu idei dyskretnej transformaty falkowej. Drugą z wybranych rodzin falek stanowią falki Daubechies, zaprojektowane pod koniec lat 80-tych XX wieku przez belgijską matematykę Ingrid Daubechies [24]. W zastosowaniach praktycznych falki z rodziny Daubechies zdobyły szeroką popularność. Dalsze dwie rodziny to – również skonstruowane przez Daubechies – modyfikacje podstawowej rodziny falek Daubechies: rodzina Coiflet i rodzina Symlet [26, 27]. Inne falki znane w literaturze to: Battle–Lamairè [8, 67], Meyer [77], Morlet [42] oraz Shannon [13, 74]. W zastosowaniach praktycznych szeroką popularnością cieszą się również falki biortogonalne¹⁶: LeGall 5/3 [65] (używane w standardzie JPEG2000 do kompresji bezstratnej [3]), Cohen-Daubechies-Feauveau 9/7 [18] (kompresja stratna JPEG2000 [3]), Antonini 9/7 [5], Odegard 9/7 [29] oraz grupa falek zaproponowane przez Villasenora i innych (13/11, 6/10, 5/3, 2/6, 9/3) [122].

2.7.1 Falki Haara

Rozważmy układ równań (2.67). Dla filtru długości $L = 2$ otrzymujemy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} h_0 + h_1 = \sqrt{2} \\ h_0^2 + h_1^2 = 1 \end{cases} . \quad (2.68)$$

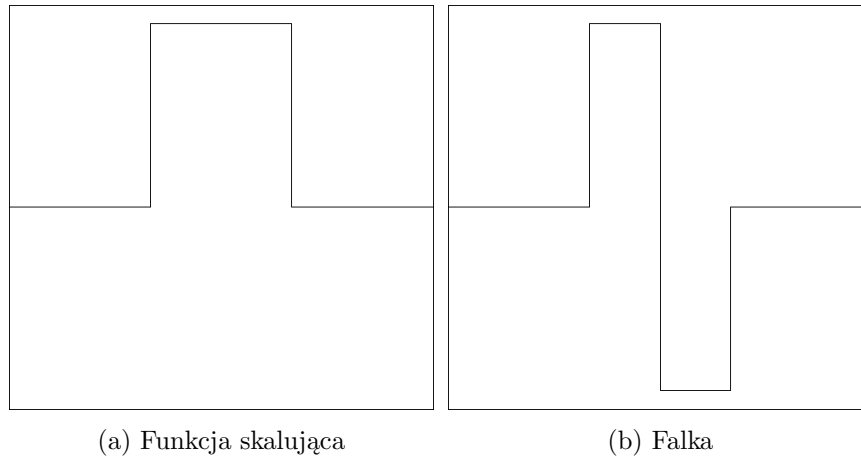
¹⁶Nazwy falek pochodzą od nazwisk badaczy, którzy je zaproponowali. Liczby po nazwie falki określają długości filtrów analizy.

Układ ten posiada tylko jedno rozwiązanie:

$$h_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} . \quad (2.69)$$

Rozwiązanie to określa współczynniki filtru dolnoprzepustowego (funkcji skalującej) Haara. Znając współczynniki h_0 i h_1 , przy użyciu równania (2.56) można wyznaczyć współczynniki filtru górnoprzepustowego (falki) Haara:

$$g_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad g_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} . \quad (2.70)$$



Rysunek 2.10: Wykresy funkcji skalującej i falki Haara

Rysunek 2.10 przedstawia wykres funkcji skalującej i falki Haara. Funkcja skalująca Haara zdefiniowana jest następująco:

$$\phi_{j,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < n2^{-j} \\ 2^{j/2} & \text{dla } n2^{-j} \leq x < (n+1)2^{-j} \\ 0 & \text{dla } x \geq (n+1)2^{-j} \end{cases} . \quad (2.71)$$

Tak zdefiniowana funkcja skalująca jest stała na przedziałach $[n2^{-j}, (n+1)2^{-j})$, gdzie $n, j \in \mathbb{Z}$, a zatem należy do przestrzeni funkcji V_j . Przestrzeń V_{j+1} składa się z funkcji przyjmujących stałą wartość na przedziałach dwa razy krótszych $[n2^{-(j+1)}, (n+1)2^{-(j+1)})$. Zgodnie z równaniem (2.22), aby z przestrzeni V_j otrzymać przestrzeń V_{j+1} , należy dodać do niej przestrzeń falek W_j . Falki Haara, rozpinające odpowiednią przestrzeń W_j , opisane są następująco:

$$\psi_{j,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < n2^{-j} \\ 2^{j/2} & \text{dla } n2^{-j} \leq x < (n + \frac{1}{2})2^{-j} \\ -2^{j/2} & \text{dla } (n + \frac{1}{2})2^{-j} \leq x < (n + 1)2^{-j} \\ 0 & \text{dla } x \geq (n + 1)2^{-j} \end{cases} . \quad (2.72)$$

Można zauważyć, że funkcja skalująca $\phi(x) = \phi_{0,0}(x)$, zdefiniowana równaniem (2.71), spełnia równanie:

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1) = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(2x - 1) \right] , \quad (2.73)$$

które jest szczególnym przypadkiem równania dylatacyjnego (2.14). Niezerowe współczynniki równania dylatacyjnego określają odpowiedź impulsową filtru dolnoprzepustowego i w tym wypadku wynoszą:

$$h_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} . \quad (2.74)$$

Widać również, że falka Haara $\psi(x) = \psi_{0,0}(x)$, określona równaniem (2.72), spełnia równanie:

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(2x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(2x - 1) \right] , \quad (2.75)$$

które jest szczególnym przypadkiem równania falkowego (2.28). Niezerowe współczynniki równania falkowego określają odpowiedź impulsową filtru górnoprzepustowego i w tym wypadku wynoszą:

$$g_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad g_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} . \quad (2.76)$$

Widać, że współczynniki odpowiedzi impulsowych filtrów dolno i górnoprzepustowego Haara uzyskane z równań dylatacyjnego (2.14) i falkowego (2.28) są identyczne ze współczynnikami uzyskanymi w wyniku rozwiązania układu równań (2.67). Demonstruje to spójność dwóch sposobów opisu dyskretnego przekształcenia falkowego: opisu opartego o algebrę liniową oraz opisu opartego o pojęcia z dziedziny cyfrowej filtracji sygnałów.

W celu zademonstrowania właściwości falek Haara, rozważony zostanie następujący przykład. Niech dany będzie sygnał:

$$\mathbf{x} = [4, 6, 10, 12, 8, -8, 6, 6] \quad . \quad (2.77)$$

Wyznamy współczynniki rozwinięcia falkowego tego sygnału zgodnie z równaniami (2.17) i (2.21), zdefiniowanymi w podrozdziale 2.2. W przypadku funkcji skalującej i falki Haara, ze względu na długość filtra wynoszącą 2, równania te można uprościć do postaci:

$$c_{0,n} = \frac{x(2n-1) + x(2n)}{\sqrt{2}} \quad , \quad (2.78)$$

$$d_{0,n} = \frac{x(2n-1) - x(2n)}{\sqrt{2}} \quad , \quad (2.79)$$

dla $n = 1, \dots, \frac{N}{2}$, gdzie N to długość sygnału. Dla przykładowego sygnału $\mathbf{x}$ otrzymujemy aproksymację pierwszego poziomu:

$$\mathbf{t}^{(1)} = [5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 0, 6\sqrt{2}] \quad (2.80)$$

oraz detal pierwszego poziomu:

$$\mathbf{f}^{(1)} = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 8\sqrt{2}, 0] \quad . \quad (2.81)$$

W powyższym przykładzie szczególną uwagę należy zwrócić na dwie pary elementów sygnału wejściowego $\mathbf{x}$: parę $(8, -8)$ oraz parę $(6, 6)$. W przypadku pierwszej pary następuje szybka zmiana wartości sygnału w czasie. Zmiana ta zachodzi z najwyższą częstotliwością możliwą przy tej częstotliwości próbkowania. Dla tej pary filtr dolnoprzepustowy daje wartość 0, natomiast filtr górnoprzepustowy daje wartość $8\sqrt{2}$. Inaczej ma się sytuacja z parą elementów sygnału $(6, 6)$. W tym przypadku wartość sygnału w czasie nie ulega zmianie, co odpowiada niskiej częstotliwości sygnału. Filtr dolnoprzepustowy dla tej pary elementów produkuje wartość $6\sqrt{2}$, zaś górnoprzepustowy daje 0. Takie wyniki zgadzają się z opisem filtrów podanym w podrozdziale 2.4 i uzasadniają nazwy filtrów. Filtr dolnoprzepustowy zatrzymuje całkowicie składową o pulsacji π radianów, a przepuszcza składową stałą, zaś filtr górnoprzepustowy na odwrót. Zaobserwować można, że w przypadku obu filtrów rośnie amplituda przefiltrowanego sygnału. Wynika to bezpośrednio z równania (2.5), a więc z konieczności zachowania takiej samej normy sygnału przed i po filtracji.

Można oczywiście obliczać kolejne etapy przekształcenia falkowego przy użyciu falek Haara. Prowadzi to do przekształcenia aproksymacji pierwszego poziomu:

$$\mathbf{t}^{(1)} = [5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 0, 6\sqrt{2}] \quad (2.82)$$

na aproksymację drugiego poziomu:

$$\mathbf{t}^{(2)} = [16, 6] \quad (2.83)$$

oraz detal drugiego poziomu:

$$\mathbf{f}^{(2)} = [-6, -6] \quad (2.84)$$

Ze względu na długość sygnału możliwe jest wykonanie jeszcze tylko jednego etapu transformaty falkowej. Prowadzi to do przekształcenia aproksymacji drugiego poziomu $\mathbf{t}^{(2)} = [16, 6]$, na aproksymację trzeciego poziomu $\mathbf{t}^{(3)} = [11\sqrt{2}]$ i detal trzeciego poziomu $\mathbf{f}^{(3)} = [5\sqrt{2}]$.

Równania (2.57) i (2.58) pozwalają na wyznaczenie współczynników odwrotnych filtrów Haara, służących do rekonstrukcji sygnału:

$$\tilde{h}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tilde{h}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (2.85)$$

$$\tilde{g}_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tilde{g}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2.86)$$

Mając dane aproksymację $\mathbf{t}^{(3)}$ oraz detale $\mathbf{f}^{(3)}$, $\mathbf{f}^{(2)}$ i $\mathbf{f}^{(1)}$, dokonuje się rekonstrukcji oryginalnego sygnału $\mathbf{x}$ przy użyciu równania (2.33). W przypadku filtru Haara można przekształcić to równanie do postaci dwóch równań:

$$x(2n-1) = \frac{c_{0,n} + d_{0,n}}{\sqrt{2}}, \quad (2.87)$$

$$x(2n) = \frac{c_{0,n} - d_{0,n}}{\sqrt{2}}, \quad (2.88)$$

gdzie $c_{0,n}$ oznacza współczynniki aproksymacji, zaś $d_{0,n}$ oznacza współczynniki detalu. Weźmy pierwszy współczynnik aproksymacji pierwszego poziomu $\mathbf{t}^{(1)}$ wynoszący $5\sqrt{2}$ oraz pierwszy współczynnik detalu pierwszego poziomu $\mathbf{f}^{(1)}$ wynoszący $-\sqrt{2}$ i obliczmy na ich podstawie dwa pierwsze elementy oryginalnego sygnału $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{5\sqrt{2} + (-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 4 \quad , \\x_1 &= \frac{5\sqrt{2} - (-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 6 \quad .\end{aligned}$$

Postępując analogicznie oblicza się pozostałe elementy oryginalnego sygnału $\mathbf{x}$. W przypadku przekształcenia wieloetapowego, najpierw na podstawie aproksymacji trzeciego poziomu $\mathbf{t}^{(3)}$ i detalu trzeciego poziomu $\mathbf{f}^{(3)}$ syntezuje się detal drugiego poziomu $\mathbf{t}^{(2)}$. Następnie na podstawie $\mathbf{t}^{(2)}$ i $\mathbf{f}^{(2)}$ syntezuje się $\mathbf{t}^{(1)}$, a następnie, na podstawie $\mathbf{t}^{(1)}$ i $\mathbf{f}^{(1)}$, odtwarza się oryginalny sygnał $\mathbf{x}$.

2.7.2 Rodziny falek Daubechies, Coiflet i Symlet

Jak już zostało zaznaczone, układ równań (2.67) jest układem $\frac{L}{2} + 1$ równań z L niewiadomymi, gdzie L to długość filtru. Oznacza to, że dla $L > 2$ niewiadomych jest więcej niż równań. Otrzymuje się w ten sposób stopnie swobody, które pozwalają na dostosowywanie właściwości falki. Ingrid Daubechies zaproponowała [26], aby na powstałe w ten sposób stopnie swobody nałożyć warunek zerowania się pierwszych $\frac{L}{2} - 1$ momentów falki. Układ równań prowadzący do uzyskania współczynników falek Daubechies ma postać:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{L-1} h_n = \sqrt{2} \\ \sum_{n=0}^{L-1} h_n h_{n+2m} = \delta_m & \text{dla } m = 0, 1, 2, \dots, \frac{L}{2} - 1 \\ \sum_{q=0}^{L-1} q^k (-1)^q h_{L-1-q} = 1 & \text{dla } k = 1, 1, 2, \dots, \frac{L}{2} - 1 \end{cases} \quad (2.89)$$

gdzie pierwsze dwa równania układu stanowią powtórzenie równań układu (2.67), zaś równanie trzecie jest warunkiem zerowania się momentów falki. Przykładowo, dla filtru o długości $L = 4$, powstaje następujący układ równań:

$$\begin{cases} h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \sqrt{2} \\ h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1 \\ h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0 \\ 0h_3 - 1h_2 + 2h_1 - 3h_0 = 0 \end{cases} \quad , \quad (2.90)$$

którego rozwiązanie stanowią liczby

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \quad (2.91)$$

Warunek zerowania się momentów falki prowadzi do powstania falek, które idealnie reprezentują wielomiany stopnia $\frac{L}{2} - 1$ i niższych (współczynniki falkowe transformaty takiego wielomianu wynoszą zero). Zależności wielomianowe występują często w sygnałach naturalnych (obrazy, dźwięki), co sprawia, że rodzina falek Daubechies bardzo dobrze sprawdza się w praktycznych zastosowaniach przetwarzania sygnałów. Wykresy wybranych funkcji skalujących i falek z rodziny Daubechies pokazano na Rysunku 2.11.

Inne falki zaprojektowane przez Daubechies to rodziny Coiflet i Symlet. Pierwsza z nich została zaprojektowana¹⁷ na prośbę Ronalda Coifmana. Współczynniki filtrów dolno i górnoprzepustowych tych falek cechują się prawie idealną symetrią. Ponadto funkcje skalujące tej rodziny również posiadają zerujące się momenty, dzięki czemu lepiej aproksymują sygnały naturalne¹⁸. Współczynniki najprostszej funkcji skalującej Coiflet 6 mają następujące wartości:

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1 - \sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, & h_1 &= \frac{5 + \sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, & h_2 &= \frac{14 + 2\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \\ h_3 &= \frac{14 - 2\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, & h_4 &= \frac{1 - \sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, & h_5 &= \frac{-3 + \sqrt{7}}{16\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

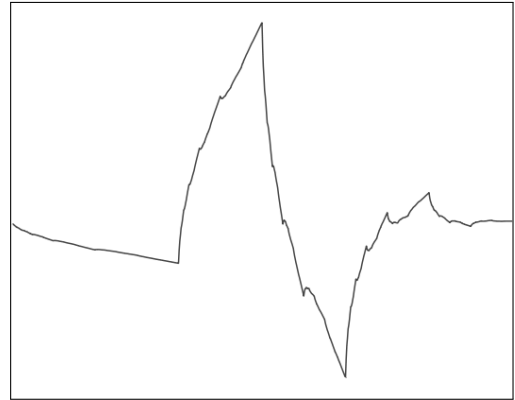
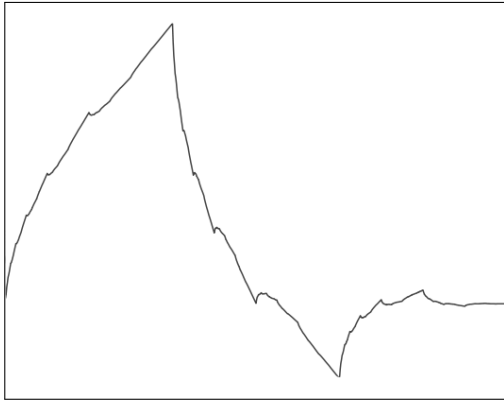
Wykresy trzech najkrótszych funkcji skalujących i falek z tej rodziny przedstawiono na Rysunku 2.12.

Falki z rodziny Symlet są bardzo podobne do zwykłych falek Daubechies, jednak cechują się większą symetrią od nich¹⁹. Filtry Symlet o odpowiedzi impulsowej długości 4 i 6 są identyczne ze standardowymi filtrami Daubechies. Różnice pojawiają się dopiero przy filtrach długości 8 lub większej. Szczegółowe informacje dotyczące Symletów znaleźć można w [26], str. 194 i 254–257. Wykresy trzech funkcji skalujących i falek z tej rodziny przedstawiono na Rysunku 2.13.

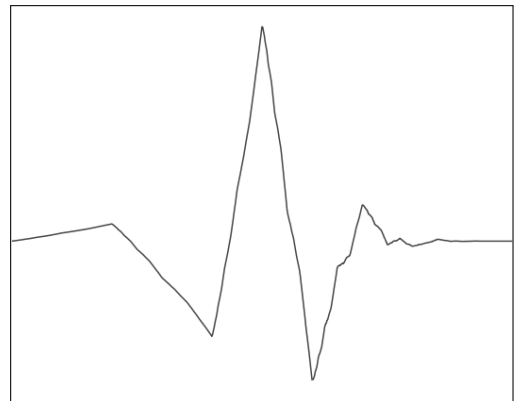
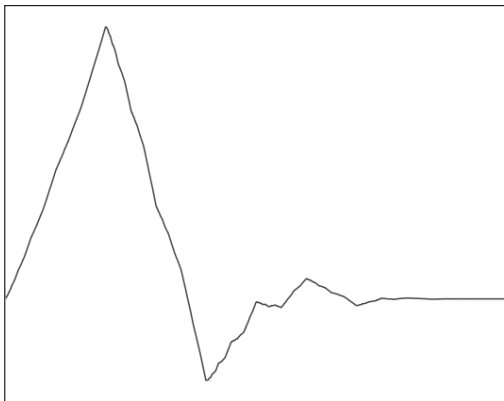
¹⁷Patrz: [26], str. 258–261.

¹⁸Patrz: [126], str. 58–60.

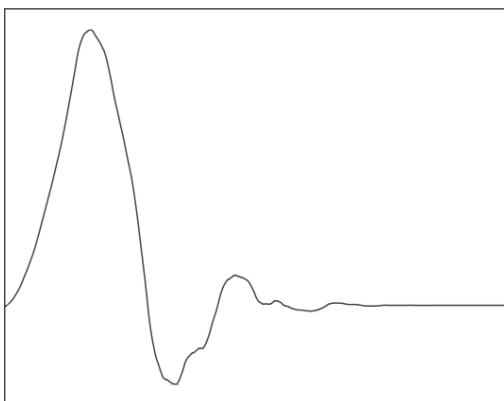
¹⁹Wbrew swojej nazwie są jednak mniej symetryczne niż falki Coiflet.



(a) Funkcja skalująca i falka dla filtru o długości 4

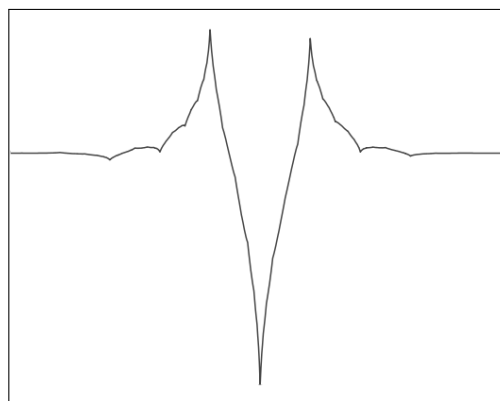
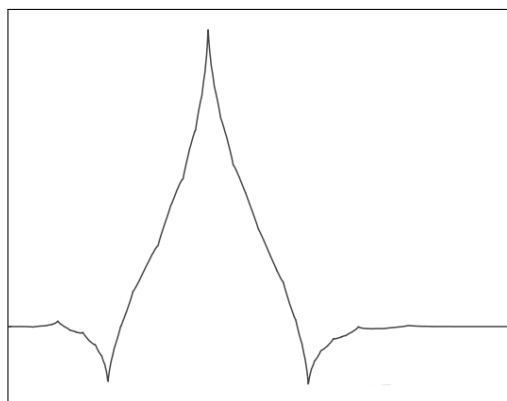


(b) Funkcja skalująca i falka dla filtru o długości 6

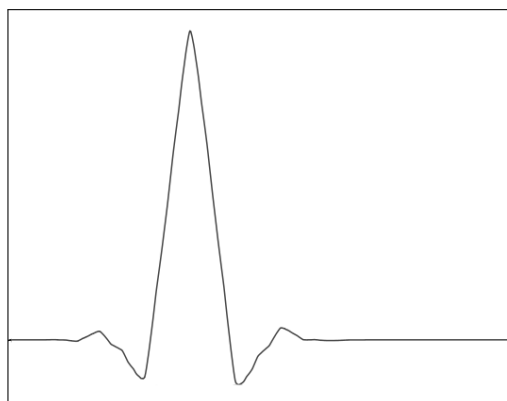


(c) Funkcja skalująca i falka dla filtru o długości 8

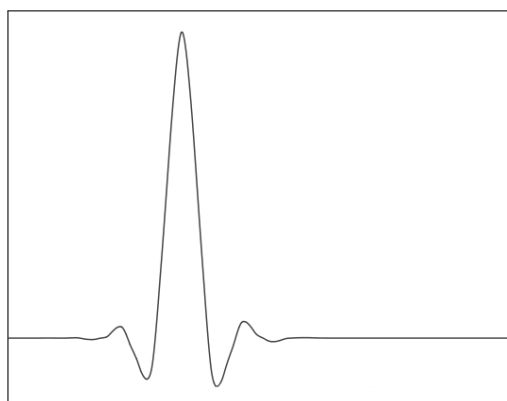
Rysunek 2.11: Wykresy funkcji skalujących (lewa kolumna) i falek (prawa kolumna) z rodziny Daubechies.



(a) Funkcja skalująca i falka dla filtru o długości 6

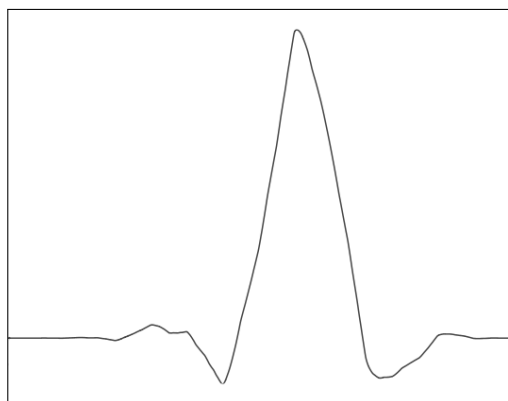


(b) Funkcja skalująca i falka dla filtru o długości 12

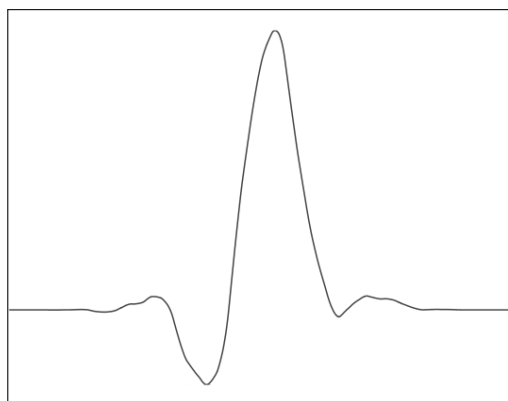


(c) Funkcja skalująca i falka dla filtru o długości 18

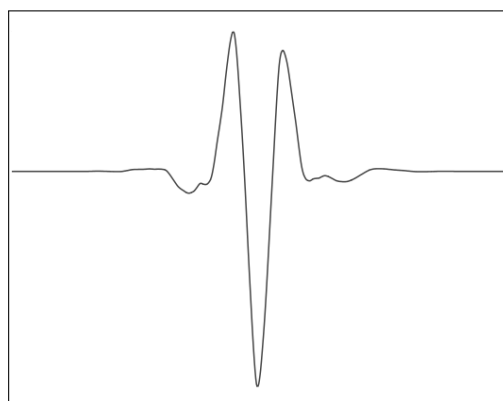
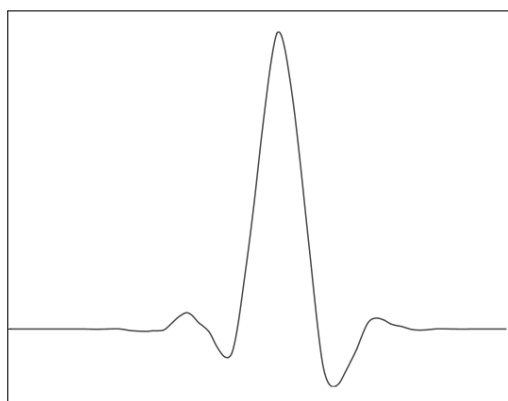
Rysunek 2.12: Wykresy funkcji skalujących (lewa kolumna) i falek (prawa kolumna) z rodziny Coiflet.



(a) Funkcja skalująca i falka dla filtru o długości 8



(b) Funkcja skalująca i falka dla filtru o długości 10



(c) Funkcja skalująca i falka dla filtru o długości 12

Rysunek 2.13: Wykresy funkcji skalujących (lewa kolumna) i falek (prawa kolumna) z rodziny Symlet.

2.8 Osadzanie cyfrowych znaków wodnych w dziedzinie DWT

W niniejszym podrozdziale przedstawione zostanie zagadnienie osadzania cyfrowych znaków wodnych w dziedzinie przekształcenia falkowego. Cyfrowe znaki wodne to zagadnienie badawcze, którego koncepcja pojawiła się po raz pierwszy w 1990 roku [62], jednak szeroką popularność zdobyło dopiero w drugiej połowie lat 90-tych XX wieku [94] i od tamtej pory przyciąga coraz większą uwagę badaczy. Jego pojawienie wiąże się z coraz większą możliwością rozpowszechnia drogą cyfrową w sposób nieautoryzowany multimediiów chronionych prawem autorskim. Ideą osadzania cyfrowego znaku wodnego w medium (np. w obrazie, dźwięku lub filmie) jest umieszczenie w nim pewnej dodatkowej informacji, zwanej znakiem wodnym. Informacja ta może zostać później wykorzystana na różne sposoby, np. w celu potwierdzenia posiadania praw autorskich do medium. Osadzanie cyfrowych znaków wodnych w dziedzinie dyskretnego przekształcenia falkowego posłuży za przykładowe zagadnienie z dziedziny przetwarzania sygnałów, które może zostać ulepszone poprzez dostosowanie funkcji bazowej przekształcenia falkowego. Synteza funkcji bazowych – opisana szczegółowo w Rozdziale 4 – odbywać się będzie tylko na podstawie oceny przetworzonego sygnału, w tym wypadku jakości znaku wodnego odzyskanego z oznaczonego obrazu.

2.8.1 Pojęcia podstawowe

Wprowadźmy podstawową terminologię, która będzie wykorzystywana w dalszej części rozprawy:

znak wodny : ciąg, najczęściej losowy ze zbioru $\{-1, 1\}$, albo obrazek (logo) osadzany w oznaczanym obrazie (ang. *cover image*). Długość znaku wodnego może być dowolna lub z góry ustalana przez algorytm osadzenia.

pojemność²⁰(ang. *capacity*) : ilość bitów znaku wodnego możliwych do osadzenia w oznaczanym medium.

²⁰Na chwilę obecną nie istnieje praktycznie żadna polskojęzyczna literatura poświęcona znakom wodnym. Tym samym nie istnieją polskie odpowiedniki angielskiej terminologii. Autor zmuszony jest więc do stosowania własnych tłumaczeń, jednak przy wprowadzaniu nowego terminu zawsze podawany będzie oryginalny termin angielski.

osadzanie : proces modyfikacji pikseli (osadzanie w dziedzinie czasu) bądź współczynników transformaty (osadzanie w dziedzinie transformaty) w wyniku których w obrazie umieszczony zostaje podany znak wodny w sposób umożliwiający jego późniejszą detekcję.

siła osadzenia (ang. *embedding strength*): współczynnik regulujący względną amplitudę znaku wodnego.

miejsce osadzenia : współczynniki transformaty bądź piksele obrazu modyfikowane w procesie osadzania znaku.

ekstrakcja : proces w którym następuje odzyskanie domniemanego znaku wodnego z pikseli bądź współczynników transformaty obrazu.

detekcja : porównanie wyekstrahowanego znaku wodnego ze znakiem osadzonym w celu stwierdzenia ich zgodności bądź jej braku. W zdecydowanej większości algorytmów detekcja dokonywana jest poprzez obliczenie korelacji znaku osadzonego i wyekstrahowanego. Oczekuje się, że korelacja znaku osadzonego i wyekstrahowanego będzie jak największa. W metodach ślepych – a taka metoda będzie rozpatrywana w tej pracy – często nie jest możliwe osiągnięcie korelacji równej 1.

separowalność (ang. *separability*) : różnica pomiędzy wartościami korelacji:

- a) wyekstrahowanego znaku wodnego z osadzonym znakiem wodnym oraz
- b) wyekstrahowanego znaku wodnego z losowymi znakami wodnymi. W praktyce oczekuje się nie tylko maksymalizacji korelacji znaku wyekstrahowanego z osadzonym, ale również minimalizacji korelacji znaku wyekstrahowanego z innymi losowymi znakami wodnymi – w idealnych warunkach korelacja ze znakiem losowym powinna wynieść 0. Wysoka separowalność ma gwarantować bezbłędną weryfikację znaku wodnego.

atak : jakiekolwiek działanie – celowe bądź nie – mogące prowadzić do uszkodzenia bądź całkowitego usunięcia znaku wodnego.

odporność (ang. *robustness*): zdolność systemu osadzania znaków wodnych do oparcia się atakom.

jakość (ang. *fidelity*) : Słowo *fidelity* oznacza w dosłownym tłumaczeniu “wierność, dokładność” i tak też jest rozumiane w przypadku osadzania niewidocznych znaków wodnych – jako wierność oryginałowi obrazu z osadzonym znakiem wodnym. W niniejszej pracy pojęcie *fidelity* zdecydowano się tłumaczyć jako “jakość obrazu”.

klucz prywatny : Jakakolwiek informacja wykorzystywana w procesie osadzania i posiadana tylko przez osobę osadzającą znak, a niezbędna do przeprowadzenia procesu ekstrakcji.

Algorytmy osadzania znaków wodnych podzielić można ze względu na kilka podstawowych kryteriów:

1. Miejsce osadzenia:

- Dziedzina czasu/przestrzeni: Znak wodny osadzany jest bezpośrednio w dziedzinie czasu i/lub przestrzeni. Dokonuje się tego np. poprzez zamianę najmniej znaczących bitów. Zaletą takich algorytmów jest prostota, główną wadą mała pojemność znaku (ilość bitów które można osadzić) i mała odporność znaku na manipulacje.
- Dziedzina transformaty: Znak osadzany jest w dziedzinie przekształcenia, np. DCT, DWT albo Fouriera-Melina. Zaletą takiego osadzania znaku jest większa pojemność oraz większa odporność na manipulacje.

2. Trwałość:

- znaki trwałe (ang. *robust*): Znak wodny ma umożliwić potwierdzenie praw autorskich do medium, co oznacza że znak wodny nie może zostać usunięty z medium, przekopiowany do innego medium oraz nie można wprowadzić do medium innego znaku wodnego. Dokonanie takiej operacji musi prowadzić do uszkodzenia medium w stopniu uniemożliwiającym jego dalsze wykorzystywanie.
- znaki kruche (ang. *fragile*): Osadzenie znaku wodnego ma umożliwić wykrycie jakichkolwiek modyfikacji dokonanych w medium. Oznacza to, że jakakolwiek modyfikacja oznaczonego medium musi prowadzić do bezpowrotnego zniszczenia znaku.

3. Sposób osadzania:

- addytywny: Algorytmy addytywne osadzają znak, będący ciągiem losowym, poprzez wymnożenie go przez współczynnik skalujący, a następnie dodanie go do wybranych współczynników transformaty.
- kwantyzacyjny: Osadzanie odbywa się poprzez kwantyzację współczynników transformaty. Rolę znaku wodnego pełni użyta strategia kwantyzacji.

4. Sposób detekcji:

- nieślepe (ang. *non-blind*): Do wykrycia znaku konieczne jest posiadanie oryginalnego, nieoznaczonego medium.
- ślepe (ang. *blind*): Do wykrycia znaku nie jest potrzebne posiadanie oryginalne, nieoznaczonego medium. Algorytmy ślepe mają większe znaczenie praktyczne ze względu na praktyczną niemożliwość zastosowania algorytmów nieślepych do przeszukiwania dużych baz multimedialnych [127].

5. Widoczność:

- znaki widoczne (ang. *perceptible*): znak wodny jest widoczny/słyszalny. Przykładem może być tutaj logo stacji telewizyjnej umieszczane w rogu ekranu.
- znaki niewidoczne (ang. *imperceptible*): znak wodny ma prowadzić do jak najmniejszych zniekształceń w oznaczanym medium. Głównym powodem jest chęć ukrycia faktu osadzenia znaku wodnego, aby osoba korzystająca z medium nie podejmowała prób jego usunięcia bądź uszkodzenia. Innym istotnym czynnikiem jest możliwość dalszego korzystania z medium w sposób niezakłócony (jest to szczególnie ważne w przypadku obrazów medycznych, gdzie wprowadzenie zniekształcenia do obrazu może prowadzić do błędnej diagnozy).

Część wymagań stawianych systemom osadzania cyfrowych znaków wodnych jest wzajemnie sprzeczna. Dotyczy to pojemności znaku, jego separowalności i jakości obrazu. W praktyce pojemność znaku jest najczęściej traktowana jako z góry ustalona²¹, co pozostawia separowalność i jakość obrazu jako dwa sprzeczne kry-

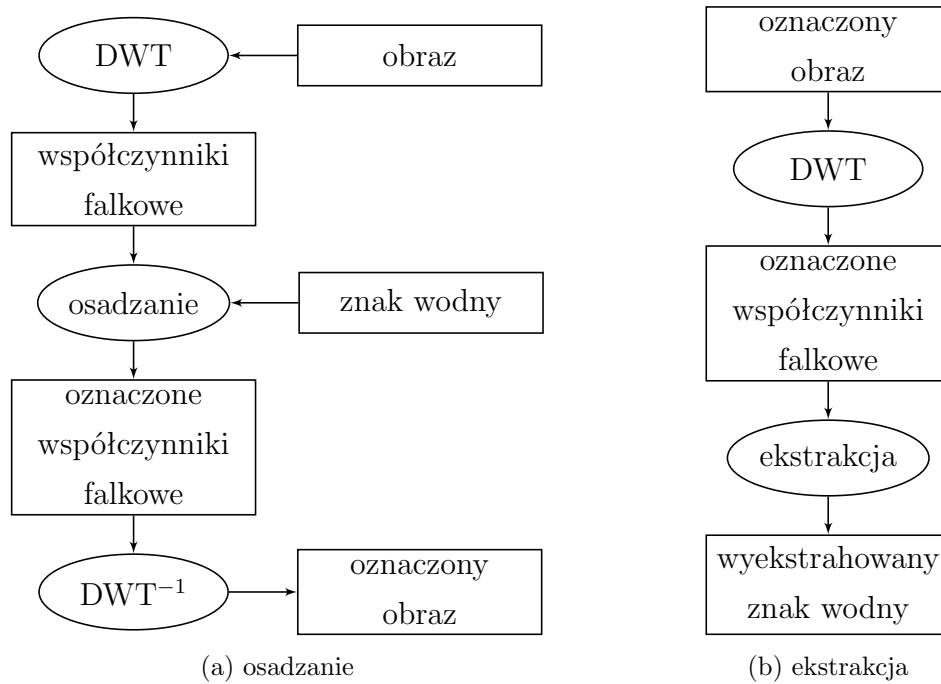
²¹Jest to heurystyczne założenie, które dobrze sprawdza się w praktyce, a wynika z braku teoretycznej wiedzy pozwalającej oszacować pojemność znaku.

teria. Kompromis pomiędzy nimi jest najczęściej osiągnięty poprzez regulację siły osadzenia: jej zwiększenie powoduje spadek jakości oznaczonego obrazu i wzrost korelacji wyekstrahowanego znaku (zostało to pokazane na Rysunku 5.2 w rozdziale 5 na stronie 120).

Do tej pory zaproponowano w literaturze dziesiątki algorytmów osadzania znaków wodnych i co roku proponowane są kolejne. Nadal brakuje jednak powszechnie uznawanych standardów [22] (nie zmienił tego nawet projekt Certimark [2], powołany specjalnie w tym celu) oraz niektórych podstaw teoretycznych. Tematyka cyfrowych znaków wodnych pozostaje więc aktywnym zagadnieniem badawczym, na którego rozwój istnieje duże zapotrzebowanie. Powyższe wprowadzenie do tematyki cyfrowych znaków wodnych ma jedynie charakter poglądowy, niezbędny do zrozumienia dalszej części rozprawy. Szeroki przegląd literatury oraz zagadnień związanych z osadzaniem cyfrowych znaków wodnych znaleźć można w książkach angielskojęzycznych [21, 60, 100]. Bardzo dobry, aczkolwiek już nieco nieaktualny, spis algorytmów osadzania cyfrowych znaków wodnych w dziedzinie DWT znaleźć można w pracy Meerwalda [75]. Przegląd zagadnień związanych z atakami na cyfrowe znaki wodne można znaleźć w bardzo dobrych artykułach Voloshynovskiego i innych [125], Licksa i Jordana [68] oraz Cravera i innych [22] (autorzy tego artykułu podnoszą również kwestię standaryzacji jako kluczową dla praktycznego zastosowania cyfrowych znaków wodnych). W niniejszej pracy autor będzie operował pojęciem ataku ograniczonym do operacji przetwarzania sygnału takich jak kompresja, filtracja (np. medianowa albo dolnoprzepustowa), dodanie szumu, redukcja kolorów etc. Zgodnie z klasyfikacją Voloshynovskiego i innych [124] są to tzw. ataki usuwające (ang. *removal attacks*).

2.8.2 Ogólny schemat algorytmu osadzania znaku wodnego w dziedzinie DWT

Jako pierwsi osadzanie cyfrowego znaku wodnego w dziedzinie DWT zaproponowali Barni i inni [6]. Uznali oni, że dyskretne przekształcenie falkowe doskonale nadaje się do tego celu ze względu na jego zdolność do rozdzielania obrazu na pasma o różnych częstotliwościach, co przypomina sposób w jaki ludzkie oko postrzega obrazy. Wniosek ten był później podtrzymywany przez wielu badaczy, np. [125]. Rysunek 2.14 prezentuje ogólny schemat osadzania i ekstrakcji znaku wodnego w dziedzinie dyskretnego przekształcenia falkowego. W celu osadzania znaku



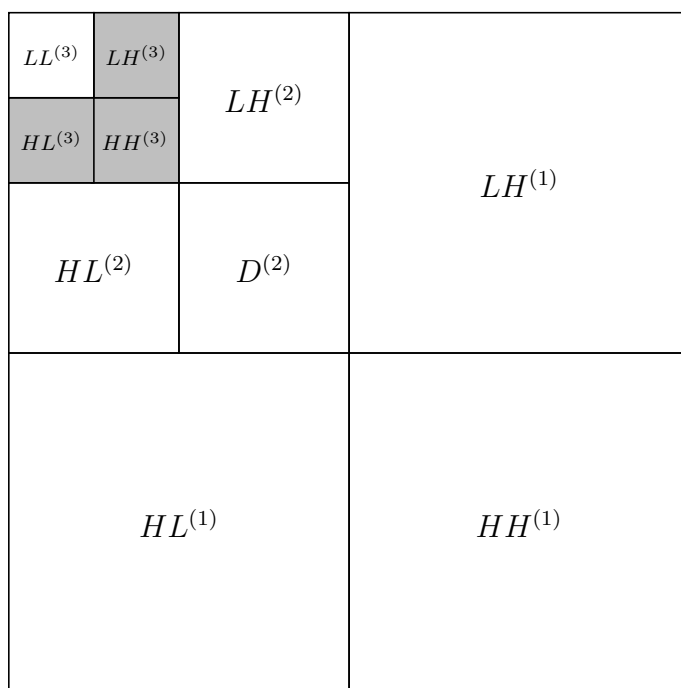
Rysunek 2.14: Ogólny schemat osadzania i ekstrakcji cyfrowego znaku wodnego w dziedzinie dyskretnego przekształcenia falkowego.

(Rysunek 2.14a), należy najpierw wykonać dyskretne przekształcenie falkowe obrazu, zgodnie z algorytmem zaprezentowanym w podrozdziale 2.6.1. W jego wyniku otrzymuje się aproksymację $LL^{(M)}$ oraz ciąg detali $\{LH^{(j)}, HL^{(j)}, HH^{(j)}\}$, gdzie $j = 1, \dots, M$, a M to ilość poziomów przekształcenia falkowego. Następnie osadza się cyfrowy znak wodny w otrzymanych współczynnikach falkowych, otrzymując oznaczone współczynniki falkowe. Współczynniki te są poddawane odwrotnemu przekształceniu falkowemu (oznaczonemu na Rysunku 2.14a jako DWT^{-1}), co prowadzi do rekonstrukcji obrazu z osadzonym znakiem wodnym. Oznaczony obraz zostaje udostępniony publicznie, co oznacza że osoby trzecie mogą przeprowadzać na nim ataki. Próba ekstrakcji znaku dokonywana jest na obrazie co do którego podejrzewa się, że zawiera osadzony znak wodny. Rysunek 2.14b przedstawia schemat ekstrakcji znaku. Obraz, który ma być sprawdzony pod kątem obecności znaku, poddawany jest prostemu przekształceniu falkowemu o identycznej ilości etapów jak przy osadzaniu. Na otrzymanych współczynnikach falkowych przeprowadza się ekstrakcję znaku wodnego, której przebieg zależy od zastosowanego algorytmu osadzania znaku. Wyekstrahowany znak jest następnie porównywany z pierwotnie osadzonym znakiem wodnym. Jeśli podobieństwo znaków jest większe od ustalonego

progu τ , stwierdzana jest obecność danego znaku wodnego w obrazie. W przeciwnym wypadku uznaje się, że znak jest nieobecny.

Wyjaśnić należy, że pewne kwestie w powyższym schemacie pozostają otwarte. Nie wydaje się, aby istniała ilość poziomów analizy obrazu, którą można by uznać za optymalną. W praktyce zdecydowana większość autorów stosuje od 3 albo 4 poziomy dekompozycji obrazu, np. [4, 7, 11, 16, 45, 52, 51, 61, 80, 81, 97, 111, 127, 133, 134], ale niektórzy sugerują użycie jedynie dwóch [50] albo wręcz jednego [66]. Ponadto nie ma zgody co do tego w których pasmach należy osadzać znak wodny. Prawie wszyscy autorzy osadzają znak wodny w pasmach detali, uznając że współczynniki aproksymacji niosą kluczowe informacje o obrazie i ich zmiana doprowadzi do nieodwracalnych zniekształceń. Można jednak znaleźć prace, w których demonstrowane są metody osadzania znaku wodnego zarówno w pasmach detali jak i w paśmie aproksymacji, np. [52, 51, 61, 97], ale niektórym autorom udało się skonstruować skuteczne algorytmy modyfikujące tylko pasmo aproksymacji, np. [20, 134].

2.8.3 Algorytm osadzania i ekstrakcji znaku wodnego



Rysunek 2.15: Trzyetapowa dekompozycja obrazu. Znak wodny osadzany jest w pasmach detali trzeciego poziomu, zaznaczonych na szaro.

W ramach niniejszej pracy rozpatrywane będzie ślepe, addytywne, trwałe osadzanie niewidocznych znaków wodnych w dziedzinie przekształcenia falkowego. Niech cyfrowy znak wodny $\mathbf{w}$ osadzany w obrazie będzie ciągiem K liczb losowych ze zbioru $\{-1, 1\}$. Wykonajmy – za sugestią większości badaczy – trzyetapowe przekształcenie falkowe obrazu zgodnie z opisem podanym w podrozdziale 2.6. Otrzymujemy w ten sposób 9 pasm detali (po trzy na każdym poziomie analizy) oraz jedno pasmo aproksymacji. Znak osadzony zostanie w pasmach detali najwyższego poziomu (Rysunek 2.15). Wybierzmy z pasm $HH^{(3)}$, $LH^{(3)}$ i $HL^{(3)}$ łącznie K współczynników największych co do modułu i oznaczmy je przez $\mathbf{c}$. Zmodyfikujmy wybrane współczynniki zgodnie z następującym wzorem²²:

$$\mathbf{c}^{(w)} = \mathbf{c} + \kappa \cdot |\mathbf{c}| \cdot \mathbf{w} \quad , \quad (2.93)$$

gdzie κ to siła osadzenia, a $\mathbf{c}^{(w)}$ to wartości oznaczonych współczynników falkowych, które zastępują w pasmach detali $HH^{(3)}$, $LH^{(3)}$ i $HL^{(3)}$ wybrane współczynniki $\mathbf{c}$. Ponieważ $w_n \in \{-1, 1\}$, to równanie (2.93) może być interpretowane jako proporcjonalne zwiększenie (gdy $w_n = 1$) lub zmniejszenie (gdy $w_n = -1$) wartości współczynnika falkowego. Siła osadzenia κ określa współczynnik proporcjonalności. Wzór (2.93) i jego modyfikacje²³ są powszechnie stosowane w literaturze w celu osadzenia znaku wodnego, najczęściej jednak w połączeniu z dodatkowymi algorytmami adaptacyjnymi (patrz podrozdział 1.1.2). W niniejszej rozprawie zdecydowano się na zastosowanie opisanego prostego algorytmu osadzania, pozbawionego elementów adaptacji, aby możliwe było zademonstrowanie możliwości płynących z adaptacji funkcji bazowych przekształcenia falkowego.

W celu przeprowadzenia detekcji znaku dokonuje się trzyetapowej dekompozycji obrazu, a następnie odczytuje wartości współczynników w których osadzony był znak wodny (konieczne jest więc zapamiętanie na etapie osadzania współrzędnych modyfikowanych współczynników). Oznaczmy wyekstrahowane współczynniki jako $\mathbf{d}^{(w)}$. Będziemy nazywać je wyekstrahowanym znakiem wodnym. Mogą się one różnić od współczynników $\mathbf{c}^{(w)}$, jeśli na obrazie przeprowadzony został atak. Detekcja przeprowadzana jest poprzez wyliczenie znormalizowanej korelacji pomiędzy osadzonym znakiem wodnym i wyekstrahowanym znakiem wodnym:

²²Uzasadnienie wzoru znaleźć można w [21].

²³Jedną z częstszych alternatywnych wersji wzoru (2.93) jest wersja nieślepa, w której na etapie ekstrakcji znana jest oryginalna wartość współczynnika. W przypadku braku ataku umożliwia to idealną ekstrakcję osadzonego znaku wodnego.

$$C = \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K \frac{(d_i^{(w)} - \bar{\mathbf{d}}^{(w)})(w_i - \bar{\mathbf{w}})}{\sigma_d \sigma_w}, \quad (2.94)$$

gdzie $\bar{\mathbf{d}}^{(w)}$ i $\bar{\mathbf{w}}$ to średnie wartości znaku wykstrahowanego i osadzonego, σ_d i σ_w to ich odchylenia standardowe, a K to długość znaku wodnego. Znormalizowana korelacja przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 1]$. Korelacja znaku osadzonego z innym, losowym znakiem wodnym powinna być bliska zeru. W przypadku gdy wykstrahowany znak wodny osadzony był z siłą $\kappa > 0$, korelacja powinna dążyć do 1. W przypadku siły osadzania $\kappa < 0$ powinna dążyć do -1 ²⁴. Jak już zostało powiedziane, w przypadku metod ślepych znormalizowana korelacja znaku wykstrahowanego i osadzonego – w przypadku ich identyczności – nie jest równa 1 bądź -1 . Dla opisywanej metody najczęściej wynosi około 0.5, jednak jest to wartość znacznie większa od korelacji ze znakiem losowym, co pozwala na skuteczną detekcję znaku²⁵.

2.9 Podsumowanie i wnioski

W rozdziale przedstawiono podstawowy aparat matematyczny niezbędny do prowadzenia dalszych rozważań dotyczących dyskretnego przekształcenia falkowego. Wprowadzono podstawowe pojęcia i definicje oraz wprowadzono wzory transformacyjne, pozwalające na wykonanie prostego i odwrotnego dyskretnego przekształcenia falkowego. Wzory te uogólniono również na przypadek dwuwymiarowy. Omówiono pojęcia związane z cyfrową filtracją sygnałów i przedstawiono alternatywne podejście do opisu transformaty falkowej, wyrażone w języku filtracji cyfrowej. Zaprezentowano ideę syntezy filtrów cyfrowych opierającą się na opisie właściwości filtrów w dziedzinie częstotliwości lub przekształcenia $\mathcal{Z}$. Opisano również podstawy osadzania cyfrowych znaków wodnych w obrazach w dziedzinie dyskretnego przekształcenia falkowego.

²⁴Ujemną siłę osadzenia stosuje się wtedy, gdy osadzany ciąg losowy ma reprezentować 1 bit informacji. Wtedy korelacja bliska 1 oznaczać może logiczne 1, a korelacja bliska -1 logiczne 0 [21].

²⁵Bardzo często stosuje się tutaj pewien próg ustalony próg τ . Gdy moduł znormalizowanej korelacji jest od niego większy, stwierdzana jest obecność cyfrowego znaku wodnego bądź bitu informacji – w zależności od przyjętej konwencji interpretacji wyniku osadzania.

Zaprezentowany w podrozdziale 2.5 opis metody projektowania filtrów cyfrowych na podstawie opisu ich właściwości w dziedzinie częstotliwości lub przekształcenia $\mathcal{Z}$ wyraźnie pokazuje, że nie jest to czynność elementarna. Wymagane właściwości filtrów muszą zostać arbitralnie określone przez eksperta. Jak wykazano w podrozdziale 1.1.1, trudno jest określić optymalną charakterystykę filtrów, jak również nie ma gwarancji, że zaproponowane przez eksperta właściwości filtrów istotnie przełożą się na ich skuteczność w wybranym zadaniu przetwarzania sygnału. Co więcej, wyznaczenie w sposób analityczny rozwiązania układu równań nieliniowych, określającego charakterystykę banku filtrów, również jest czynnością bardzo złożoną. W ramach dalszej części rozprawy oba te problemy zostaną rozwiązane. Arbitralne charakterystyki filtrów zostaną odrzucone na rzecz wymagań nałożonych na charakterystykę przetworzonego sygnału. Problem analitycznego wyznaczania rozwiązania układu równań zostanie zastąpiony zagadnieniem optymalizacji zdefiniowanej funkcji celu za pomocą metod numerycznych. Aby było to możliwe, konieczne jest wprowadzenie parametryzacji funkcji bazowych przekształcenia falkowego. Zagadnieniu temu poświęcony jest następny rozdział.

Rozdział 3

Parametryzacja falek ortogonalnych przy użyciu struktury kratowej

W poprzednim rozdziale zaprezentowane zostały teoretyczne podstawy dyskretnego przekształcenia falkowego. Omówiono koncepcję banku filtrów ortogonalnych oraz przedstawiono tradycyjne podejście do syntezy filtrów w dziedzinie częstotliwości. Celem niniejszej rozprawy jest synteza przekształceń falkowych na podstawie oceny sygnału przetworzonego za pomocą algorytmów wykorzystujących dyskretnie przekształcenie falkowe. Synteza będzie wykonywana poprzez optymalizację numeryczną. W tym celu w bieżącym rozdziale wprowadzona zostanie parametryzacja współczynników banku filtru ortogonalnych, zwana strukturą kratową, w wersji zaproponowanej przez Jacymirskiego [135], który wykazał, że możliwe jest stworzenie szybkiej sieci neuronowej bazującej na strukturze kratowej i zaproponował syntezę falek przy użyciu tej sieci. Struktura kratowa posłuży następnie jako metoda parametryzacji filtrów falkowych na potrzeby optymalizacji algorytmem ewolucyjnym (patrz podrozdział 4.3). Autor zdecydował się wybrać strukturę kratową ponieważ jest to sprawdzona metoda parametryzacji falek uznawana powszechnie w literaturze, np. [31, 32, 56, 93, 116, 117, 118], w szczególności znane są jej dobre właściwości w zadaniach optymalizacji [116]. Choć struktura kratowa cieszy się popularnością jako metoda parametryzacji falek, w literaturze proponowano również szereg innych parametryzacji, np. [63, 69, 89, 96]. Regensburger [92] wprowadził parametryzację falek ortonormalnych o zwartym nośniku z wyko-

rzystaniem dyskretnych momentów falki. Zaprezentował szczegółowe rozwiązania równań parametryzacyjnych dla falek o odpowiedzi impulsowej długości 4, 6, 8 i 10. Lipiński i Jacymirski [70] wprowadzili parametryzację falek Daubechies 4 i Daubechies 6, zademonstrowali konstrukcję transformaty o współczynnikach wymiernych oraz pokazali, że ich podejście pozwala zredukować ilość operacji arytmetycznych potrzebnych do wykonania przekształcenia. Kolejną metodą implementacji i parametryzacji falek jest schemat obliczeniowy przekształcenia falkowego znany jako *lifting scheme* [28, 107]. Pozwala on na implementację biortogonalnych systemów filtrów [108], całkowitoliczbowej transformaty falkowej [15] oraz realizację falek drugiej generacji [59, 109].

Podrozdział 3.1 wprowadza pojęcie dwupunktowych operacji bazowych, które stanowią podstawę konstrukcji struktury kratowej. Zaprezentowane zostają podstawienia zapewniające ortogonalność operacji bazowych. Operacje ortogonalne będą podstawą dalszych rozważań teoretycznych i praktycznej implementacji struktury kratowej. Podrozdział 3.2 wprowadza koncepcję struktury kratowej służącej do realizacji banku filtrów ortogonalnych przekształcenia falkowego. Omówiony zostaje schemat obliczeniowy struktury kratowej oraz realizacja wieloetapowego przekształcenia falkowego z jej pomocą. W podrozdziale 3.3 wyprowadzony zostaje rekurencyjny i iteracyjny algorytm konwersji parametrów struktury kratowej na współczynniki odpowiedzi impulsowych filtrów falkowych. Algorytm ten wykorzystywany jest następnie w podrozdziale 3.4 do przeprowadzenia autorskiego teoretycznego dowodu, pokazującego że ortogonalna struktura kratowa w wersji zaproponowanej przez Jacymirskiego realizuje ortogonalne przekształcenie falkowe, zgodnie z warunkami określonymi w Rozdziale 2. Podrozdział 3.5 opisuje zaczerpnięty z literatury sposób reprezentacji struktury kratowej, gwarantujący spełnienie wymaganych warunków na sumę kątów (parametrów) struktury kratowej, oraz oryginalne spostrzeżenia autora dotyczące wpływu tej reprezentacji na klasę funkcji bazowych możliwych do zsyntezowania.

3.1 Dwupunktowa operacja bazowa

Struktura kratowa zbudowana jest z dwupunktowych operacji bazowych, tzn. operacji posiadające dwa wejścia i dwa wyjścia. Operację taką zapisuje się w postaci macierzy:

$$D_l = \begin{bmatrix} w_{11}^{(l)} & w_{12}^{(l)} \\ w_{21}^{(l)} & w_{22}^{(l)} \end{bmatrix} , \quad (3.1)$$

gdzie l oznacza indeks operacji, a $w_{11}^{(l)}$, $w_{12}^{(l)}$, $w_{21}^{(l)}$ i $w_{22}^{(l)}$ oznaczają parametry (wagi) operacji. Działanie realizowane przez operację bazową można zapisać w postaci równania macierzowego:

$$B = D_l \cdot A , \quad \text{gdzie } A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} . \quad (3.2)$$

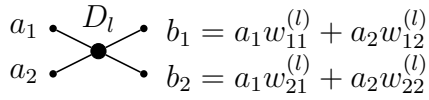
Zostało to zobrazowane na Rysunku 3.1a. Aby możliwe było odzyskanie oryginalnej macierzy A na podstawie macierzy przekształconej B , operacja bazowa D_l musi być odwracalna, co oznacza że wyznacznik macierzy D_l , danej równaniem (3.1), musi być różny od zera:

$$w_{11}^{(l)}w_{22}^{(l)} - w_{12}^{(l)}w_{21}^{(l)} \neq 0 . \quad (3.3)$$

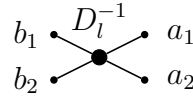
Oznacza to, że istnieje macierz odwrotna D_l^{-1} taka, że:

$$D_l^{-1}D_l = I , \quad (3.4)$$

gdzie I jest macierzą jednostkową. Działanie odwrotnej operacji bazowej pokazuje Rysunek 3.1b.



(a) Prosta operacja bazowa



(b) Odwrotna operacja bazowa

Rysunek 3.1: Dwupunktowe operacje bazowe

3.1.1 Ortogonalna dwupunktowa operacja bazowa

Przeanalizujemy sytuację, w której macierz D_l , dana równaniem (3.1), byłaby macierzą ortogonalną. Wtedy macierzą odwrotną do D_l byłaby jej transpozycja D_l^T :

$$D_l^T D_l = I . \quad (3.5)$$

Aby równanie (3.5) było spełnione, muszą zachodzić następujące równości:

$$w_{11}^{(l)} w_{21}^{(l)} + w_{12}^{(l)} w_{22}^{(l)} = 0 \quad , \quad (3.6)$$

$$(w_{11}^{(l)})^2 + (w_{12}^{(l)})^2 = 1 \quad . \quad (3.7)$$

Warunkiem wystarczającym do spełnienia równania (3.6) jest zastosowanie jednego z podstawień:

- $w_{21}^{(l)} = w_{12}^{(l)}$ oraz $w_{22}^{(l)} = -w_{11}^{(l)}$. Oznacza to, że operacja bazowa jest symetryczna:

$$P_l = P_l^T = \begin{bmatrix} w_{11}^{(l)} & w_{12}^{(l)} \\ w_{12}^{(l)} & -w_{11}^{(l)} \end{bmatrix} \quad . \quad (3.8)$$

Jeśli dodatkowo spełnione jest równanie (3.7), to prosta operacja bazowa jest identyczna z odwrotną operacją bazową:

$$P_l = P_l^T = P_l^{-1} \quad . \quad (3.9)$$

- $w_{21}^{(l)} = -w_{12}^{(l)}$ oraz $w_{22}^{(l)} = w_{11}^{(l)}$. Prowadzi to do otrzymania asymetrycznej operacji bazowej:

$$O_l = \begin{bmatrix} w_{11}^{(l)} & w_{12}^{(l)} \\ -w_{12}^{(l)} & w_{11}^{(l)} \end{bmatrix} \quad , \quad (3.10)$$

$$O_l^T = \begin{bmatrix} w_{11}^{(l)} & -w_{12}^{(l)} \\ w_{12}^{(l)} & w_{11}^{(l)} \end{bmatrix} \quad ,$$

co w przypadku jednoczesnego spełnienia równania (3.7) prowadzi do:

$$O_l^T = O_l^{-1} \quad . \quad (3.11)$$

Jeśli założymy dowolne z powyższych podstawień, to warunkiem wystarczającym do jednoczesnego spełnienia równania (3.7) jest zastosowanie podstawienia:

$$w_{11}^{(l)} = \cos(\alpha_l) \quad , \quad (3.12)$$

$$w_{12}^{(l)} = \sin(\alpha_l) \quad .$$

Równanie (3.12), w połączeniu z wcześniejszymi podstawieniami, prowadzi do dwóch podstawowych postaci ortogonalnej operacji bazowej. Symetryczna ortogonalna operacja bazowa wyrażona jest równaniem:

$$S_l = S_l^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_l) & \sin(\alpha_l) \\ \sin(\alpha_l) & -\cos(\alpha_l) \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Asymetryczna ortogonalna operacja bazowa wyrażona jest równaniami:

$$F_l = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_l) & \sin(\alpha_l) \\ -\sin(\alpha_l) & \cos(\alpha_l) \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

$$F_l^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_l) & -\sin(\alpha_l) \\ \sin(\alpha_l) & \cos(\alpha_l) \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Należy zauważyć, że jeśli macierz operacji bazowej D_l jest ortogonalna (spełnia równanie (3.5)), to realizowane przez nią przekształcenie jest ortonormalne, ponieważ zachowana jest jednostkowa norma funkcji bazowych (wierszy macierzy) przekształcenia. Jeśli macierz operacji bazowej D_l spełniałaby równość:

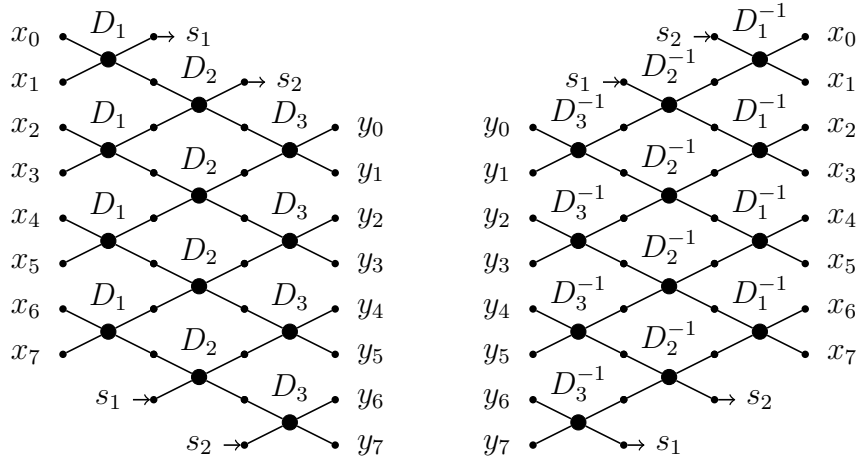
$$D_l^T D_l = D, \quad (3.16)$$

gdzie D jest macierzą diagonalną (w szczególnym przypadku macierzą skalarną), to przekształcenie realizowane przez taką macierz D_l będzie przekształceniem ortogonalnym, ponieważ jego funkcje bazowe są wzajemnie ortogonalne. Nie posiadają one jednak jednostkowej normy, a więc nie można mówić o ortonormalności takiego przekształcenia.

3.2 Struktura kratowa

Struktura kratowa jest schematem obliczeniowym pozwalającym na realizację prostego i odwrotnego przekształcenia falkowego. Struktura kratowa do realizacji prostego przekształcenia falkowego składa się z $\frac{L}{2}$ warstw, z których każda zawiera $\frac{N}{2}$ dwupunktowych operacji bazowych D_l , gdzie L i N są odpowiednio długością odpowiedzi impulsowej filtru realizowanego przez strukturę i długością przetwarzanego sygnału (Rysunek 3.2). Struktura kratowa, której wszystkie operacje bazowe D_l spełniają równanie (3.5), nazywana jest ortogonalną strukturą kratową. W każdej warstwie struktury kratowej elementy sygnału są przetwarzane parami przez

operacje bazowe D_l . Po każdej warstwie następuje cykliczne przesunięcie operacji bazowych kolejnej warstwy o jeden w dół, tzn. dolne wejście ostatniej operacji bazowej w warstwie łączone jest z górnym wyjściem pierwszej operacji bazowej z warstwy poprzedniej (strzałki s_1 i s_2 na Rysunku 3.2a). Sygnał, który ma zostać poddany przekształceniu, podawany jest na wejścia pierwszej warstwy, a następnie przetwarzany przez kolejne warstwy struktury. Górne wyjścia operacji bazowych $D_{\frac{L}{2}}$ (w ostatniej warstwie struktury) nazywane są wyjściami dolnoprzepustowymi, a ich wartości odpowiadają wartościom współczynników dolnoprzepustowych przekształconego sygnału, co zostanie to uzasadnione w dalszych podrozdziałach. Dolne wyjścia operacji bazowych $D_{\frac{L}{2}}$ nazywane są wyjściami górnoprzepustowymi i odpowiadają współczynnikom górnoprzepustowym przekształconego sygnału.



(a) Prosta struktura kratowa

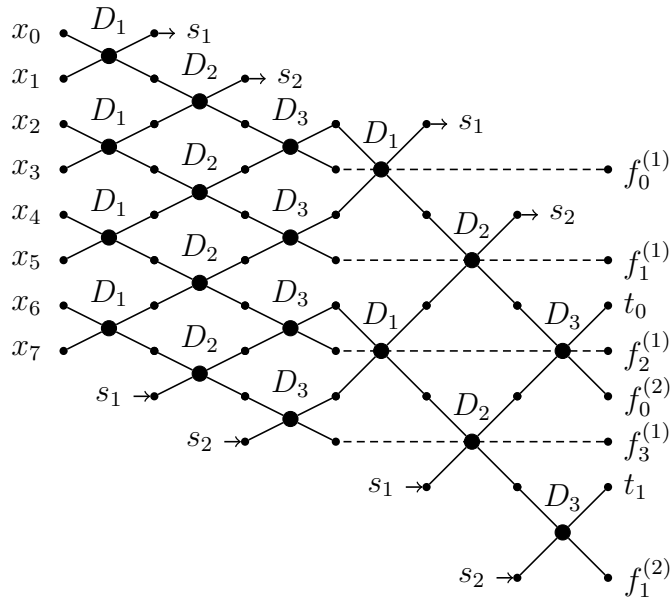
(b) Odwrotna struktura kratowa

Rysunek 3.2: Przykładowe struktury kratowe realizujące proste i odwrotne 6-punktowe przekształcenie sygnału o długości 8

Realizacja przekształcenia falkowego przy użyciu struktury kratowej powoduje opóźnienie sygnału wyjściowego o $\frac{L}{2} - 1$ elementów. Dla przykładowej struktury kratowej z Rysunku 3.2a przesunięcie wynosi 2. Oznacza to, że dla sygnału wejściowego $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]$ otrzymuje się – przy założeniu cykliczności – sygnał wyjściowy $[y_6, y_7, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]$. Realizacja DWT za pomocą struktury kratowej powoduje, że w sygnale wyjściowym współczynniki dolno i górnoprzepustowe występują na przemian. Tak więc, dla przykładowej struktury kratowej, ciąg $[y_0, y_2, y_4, y_6]$ stanowi ciąg współczynników dolnoprzepustowych, natomiast $[y_1, y_3, y_5, y_7]$ stanowi ciąg współczynników górnoprzepustowych.

Struktura kratowa do realizacji przekształcenia odwrotnego składa się z takiej samej ilości warstw i posiada taką samą ilość operacji bazowych w każdej warstwie, co struktura realizująca przekształcenie proste. Operacje bazowe w warstwie o numerze l powstają jako operacje odwrotne do operacji bazowych struktury prostej w warstwie $\frac{L}{2} - l$. Po każdej warstwie następuje cykliczne przesunięcie operacji bazowych kolejnej warstwy o jeden w górę: górne wejście pierwszej operacji bazowej w warstwie łączone jest z dolnym wyjściem ostatniej operacji bazowej w warstwie poprzedniej (strzałki s_1 i s_2 na Rysunku 3.2b). Sygnał podawany na wejście struktury kratowej realizującej odwrotne przekształcenie falkowe musi być odpowiednio spermutowany, a więc uwzględniać cykliczne przesunięcie i naprzemienne występowanie współczynników dolno i górnoprzepustowych, powodowane przez strukturę kratową realizującą przekształcenie proste. Przykładowa struktura kratowa realizująca odwrotne przekształcenie falkowe pokazana jest na Rysunku 3.2b.

3.2.1 Przekształcenie wieloetapowe przy użyciu struktury kratowej



Rysunek 3.3: Struktura kratowa realizująca dwuetapowe przekształcenie ośmioelementowego sygnału.

W celu wykonania przekształcenia wieloetapowego przy użyciu struktury kratowej, należy dołączyć kolejną strukturę kratową o identycznej liczbie warstw

i identycznych operacjach bazowych w poszczególnych warstwach do dolnoprzepustowych wyjść struktury realizującej jeden etap przekształcenia falkowego. Wyjścia te stają się tym samym wejściami kolejnego etapu przekształcenia, na wyjściu którego ponownie otrzymuje się współczynniki dolno i górnoprzepustowego kolejnego etapu transformaty. Rysunek 3.3 pokazuje przykład wieloetapowej struktury kratowej, realizującej dwuetapowe sześciopunktowe przekształcenie sygnału ośmioelementowego. W pierwszym etapie przekształcenia sygnał wejściowy $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]$ zostaje przekształcony na sygnał $[y_6, y_7, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]$, przy czym ciąg $[y_1, y_3, y_5, y_7]$ stanowi detal pierwszego poziomu (oznaczymy jako $\mathbf{f}^{(1)}$ i ponumerujemy wyrazy tego ciągu od zera) i nie podlega dalszym przekształceniom. Ciąg $[y_0, y_2, y_4, y_6]$ staje się wejściem dla struktury kratowej realizującej drugi etap przekształcenia i zostaje przekształcony na ciąg $[t_1, f_1^{(2)}, t_0, f_0^{(2)}]$, gdzie $\mathbf{t}$ to aproksymacja, a $\mathbf{f}^{(2)}$ to detal drugiego poziomu. Należy zwrócić uwagę, że również w sygnale wyjściowym drugiego poziomu współczynniki dolno i górnoprzepustowe występują na zmianę, a sygnał wyjściowy ulega cyklicznemu przesunięciu. Ostatecznie, po dwóch etapach sześciopunktowego przekształcenia przy użyciu struktury kratowej, sygnał wejściowy $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]$ został przekształcony na sygnał $[f_0^{(2)}, f_3^{(1)}, t_1, f_0^{(1)}, f_1^{(2)}, f_1^{(1)}, t_0, f_2^{(1)}]$.

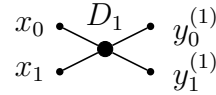
3.3 Konwersja parametrów struktury kratowej na współczynniki filtrów

Struktura kratowa, opisana w podrozdziale 3.2, może zostać wykorzystana do realizacji cyfrowej filtracji sygnału. W strukturze kratowej posiadającej $\frac{L}{2}$ warstw, każde wyjście struktury zależy od wartości dokładnie L wejść. W niniejszym podrozdziale zostanie pokazane, że ta zależność wyjść od wejść odpowiada operacji iloczynu skalarnego współczynników filtra i sygnału wejściowego, co jest równoważne wykonaniu cyfrowej filtracji sygnału wejściowego za pomocą banku filtrów ortogonalnych. Skonstruowany zostanie algorytm wyznaczania współczynników filtrów, realizowanych przez strukturę kratową, na podstawie wartości wag operacji bazowych D_l . W podrozdziale 3.4 zostanie udowodnione, że – przy założeniu dodatkowych warunków – filtry realizowane przez strukturę kratową, spełniają warunki określone w podrozdziale 2.5.2, a więc stanowią bank ortogonalnych filtrów falkowych. Już w tym rozdziale będziemy się odwoływać do tych filtrów jako do filtrów dolnoprzepustowego $\mathbf{h}$ i górnoprzepustowego $\mathbf{g}$.

Rozpocznijmy konstrukcję algorytmu od rozpatrzenia najprostszego przypadku jednowarstwowej struktury kratowej, realizującej przekształcenie dwupunktowe. Fragment takiej struktury został pokazany na Rysunku 3.4. Na jego podstawie widać, że wyjścia $y_0^{(1)}$ i $y_1^{(1)}$ zależą od wejść x_0 i x_1 w następujący sposób:

$$y_0^{(1)} = x_0 w_{11}^{(1)} + x_1 w_{12}^{(1)} , \quad (3.17)$$

$$y_1^{(1)} = x_0 w_{21}^{(1)} + x_1 w_{22}^{(1)} . \quad (3.18)$$

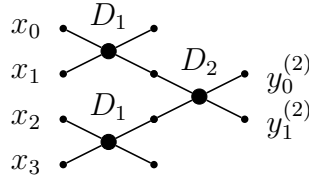


Rysunek 3.4: Fragment jednowarstwowej struktury kratowej.

Wynika to bezpośrednio z definicji operacji bazowej (równanie (3.2) i Rysunek 3.1a). W tym najprostszym przypadku wagi operacji bazowej D_1 odpowiadają bezpośrednio współczynnikom filtrów dolno- i górnoprzepustowego:

$$\mathbf{h}^{(2)} = [w_{11}^{(1)}, w_{12}^{(1)}] , \quad (3.19)$$

$$\mathbf{g}^{(2)} = [w_{21}^{(1)}, w_{22}^{(1)}] . \quad (3.20)$$



Rysunek 3.5: Fragment dwuwarstwowej struktury kratowej.

Rozpatrzmy strukturę dwuwarstwową, realizującą przekształcenie czteropunktowe. Na Rysunku 3.5 przedstawiono fragment takiej struktury, pokazujący że wartości wyjść $y_0^{(2)}$ i $y_1^{(2)}$ zależą od wartości czterech wejść: x_0 , x_1 , x_2 i x_3 . Rozpisując, w sposób analogiczny do wcześniejszego, zależność wyjść od wejść otrzymujemy:

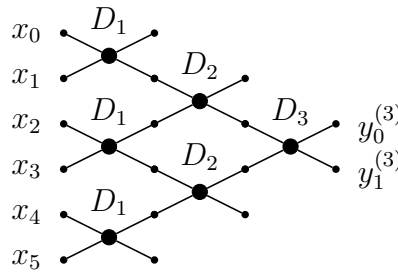
$$\begin{aligned} y_0^{(2)} &= y_1^{(1)} w_{11}^{(2)} + y_0^{(1)} w_{12}^{(2)} = \\ &= [x_0 w_{21}^{(1)} + x_1 w_{22}^{(1)}] w_{11}^{(2)} + [x_2 w_{11}^{(1)} + x_3 w_{12}^{(1)}] w_{12}^{(2)} = \\ &= x_0 w_{21}^{(1)} w_{11}^{(2)} + x_1 w_{22}^{(1)} w_{11}^{(2)} + x_2 w_{11}^{(1)} w_{12}^{(2)} + x_3 w_{12}^{(1)} w_{12}^{(2)} , \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
 y_1^{(2)} &= y_1^{(1)} w_{21}^{(2)} + y_0^{(1)} w_{22}^{(2)} = \\
 &= [x_0 w_{21}^{(1)} + x_1 w_{22}^{(1)}] w_{21}^{(2)} + [x_2 w_{11}^{(1)} + x_3 w_{12}^{(1)}] w_{22}^{(2)} = \\
 &= x_0 w_{21}^{(1)} w_{21}^{(2)} + x_1 w_{22}^{(1)} w_{21}^{(2)} + x_2 w_{11}^{(1)} w_{22}^{(2)} + x_3 w_{12}^{(1)} w_{22}^{(2)} ,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

przy czym należy podkreślić, że w miejsce zmiennej $y_1^{(1)}$ podstawiana jest wartość identyczna z podaną w równaniu (3.18), natomiast przy wstawianiu wartości $y_0^{(1)}$ zmieniane są – w stosunku do równania (3.17) – wartości ciągu wejściowego $\mathbf{x}$. Ulega on przesunięciu o $2 - x_0$ zamienia się na x_2 , x_1 na x_3 itd. Wynika to z tego, że na dolne wejście operacji D_2 z Rysunku 3.5 podawane jest górne wyjście operacji D_1 , która otrzymała na wejściu wartości wektora $\mathbf{x}$ przesunięte o 2. Po uporządkowaniu wyrazów w równaniach (3.21) i (3.22) otrzymujemy następujące filtry:

$$\mathbf{h}^{(4)} = [w_{21}^{(1)} w_{11}^{(2)}, w_{22}^{(1)} w_{11}^{(2)}, w_{11}^{(1)} w_{12}^{(2)}, w_{12}^{(1)} w_{12}^{(2)}] , \tag{3.23}$$

$$\mathbf{g}^{(4)} = [w_{21}^{(1)} w_{21}^{(2)}, w_{22}^{(1)} w_{21}^{(2)}, w_{11}^{(1)} w_{22}^{(2)}, w_{12}^{(1)} w_{22}^{(2)}] . \tag{3.24}$$



Rysunek 3.6: Fragment trójwarstwowej struktury kratowej.

Rozpatrzmy następnie pokazany na Rysunku 3.6 fragment struktury kratowej o trzech warstwach, realizującej przekształcenie sześciopunktowe. Rozpisując zależność wyjść $y_0^{(3)}$ i $y_1^{(3)}$ od wejść, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
y_0^{(3)} &= y_1^{(2)} w_{11}^{(3)} + y_0^{(2)} w_{12}^{(3)} = \\
&= [x_0 w_{21}^{(1)} w_{21}^{(2)} + x_1 w_{22}^{(1)} w_{21}^{(2)} + x_2 w_{11}^{(1)} w_{22}^{(2)} + x_3 w_{12}^{(1)} w_{22}^{(2)}] w_{11}^{(3)} + \\
&+ [x_2 w_{21}^{(1)} w_{11}^{(2)} + x_3 w_{22}^{(1)} w_{11}^{(2)} + x_4 w_{11}^{(1)} w_{12}^{(2)} + x_5 w_{12}^{(1)} w_{12}^{(2)}] w_{12}^{(3)} = \\
&= x_0 w_{21}^{(1)} w_{21}^{(2)} w_{11}^{(3)} + x_1 w_{22}^{(1)} w_{21}^{(2)} w_{11}^{(3)} + \\
&+ x_2 [w_{11}^{(1)} w_{22}^{(2)} w_{11}^{(3)} + w_{21}^{(1)} w_{11}^{(2)} w_{12}^{(3)}] + \\
&+ x_3 [w_{12}^{(1)} w_{22}^{(2)} w_{11}^{(3)} + w_{22}^{(1)} w_{11}^{(2)} w_{12}^{(3)}] + \\
&+ x_4 w_{11}^{(1)} w_{12}^{(2)} w_{12}^{(3)} + x_5 w_{12}^{(1)} w_{12}^{(2)} w_{12}^{(3)} ,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
y_1^{(3)} &= y_1^{(2)} w_{21}^{(3)} + y_0^{(2)} w_{22}^{(3)} = \\
&= [x_0 w_{21}^{(1)} w_{21}^{(2)} + x_1 w_{22}^{(1)} w_{21}^{(2)} + x_2 w_{11}^{(1)} w_{22}^{(2)} + x_3 w_{12}^{(1)} w_{22}^{(2)}] w_{21}^{(3)} + \\
&+ [x_2 w_{21}^{(1)} w_{11}^{(2)} + x_3 w_{22}^{(1)} w_{11}^{(2)} + x_4 w_{11}^{(1)} w_{12}^{(2)} + x_5 w_{12}^{(1)} w_{12}^{(2)}] w_{22}^{(3)} = \\
&= x_0 w_{21}^{(1)} w_{21}^{(2)} w_{21}^{(3)} + x_1 w_{22}^{(1)} w_{21}^{(2)} w_{21}^{(3)} + \\
&+ x_2 [w_{11}^{(1)} w_{22}^{(2)} w_{21}^{(3)} + w_{21}^{(1)} w_{11}^{(2)} w_{22}^{(3)}] + \\
&+ x_3 [w_{12}^{(1)} w_{22}^{(2)} w_{21}^{(3)} + w_{22}^{(1)} w_{11}^{(2)} w_{22}^{(3)}] + \\
&+ x_4 w_{11}^{(1)} w_{12}^{(2)} w_{22}^{(3)} + x_5 w_{12}^{(1)} w_{12}^{(2)} w_{22}^{(3)} .
\end{aligned} \tag{3.26}$$

przy czym przy podstawianiu wartości $y_0^{(2)}$ następuje przesunięcie wartości ciągu $\mathbf{x}$ o 2 w stosunku do wartości podanych w równaniu (3.21). Uzasadnienie jest analogiczne do podanego wcześniej. Z równań (3.25) i (3.26) widać, że dla trójwarstwowej struktury kratowej, realizującej sześciopunktowe dyskretne przekształcenie falkowe, zależność współczynników filtrów od parametrów struktury jest następująca:

$$\mathbf{h}^{(6)} = [w_{21}^{(1)} w_{21}^{(2)} w_{11}^{(3)}, w_{22}^{(1)} w_{21}^{(2)} w_{11}^{(3)}, (w_{11}^{(1)} w_{22}^{(2)} w_{11}^{(3)} + w_{21}^{(1)} w_{11}^{(2)} w_{12}^{(3)}), \\ (w_{12}^{(1)} w_{22}^{(2)} w_{11}^{(3)} + w_{22}^{(1)} w_{11}^{(2)} w_{12}^{(3)}), w_{11}^{(1)} w_{12}^{(2)} w_{12}^{(3)}, w_{12}^{(1)} w_{12}^{(2)} w_{12}^{(3)}] , \tag{3.27}$$

$$\mathbf{g}^{(6)} = [w_{21}^{(1)} w_{21}^{(2)} w_{21}^{(3)}, w_{22}^{(1)} w_{21}^{(2)} w_{21}^{(3)}, (w_{11}^{(1)} w_{22}^{(2)} w_{21}^{(3)} + w_{21}^{(1)} w_{11}^{(2)} w_{22}^{(3)}), \\ (w_{12}^{(1)} w_{22}^{(2)} w_{21}^{(3)} + w_{22}^{(1)} w_{11}^{(2)} w_{22}^{(3)}), w_{11}^{(1)} w_{12}^{(2)} w_{22}^{(3)}, w_{12}^{(1)} w_{12}^{(2)} w_{22}^{(3)}] . \tag{3.28}$$

Analiza powyższych równań pozwala zapisać następującą rekurencyjną zależność wyjść od wejść:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{l} y_0^{(1)} = x_0 w_{11}^{(1)} + x_1 w_{12}^{(1)} \\ y_1^{(1)} = x_0 w_{21}^{(1)} + x_1 w_{22}^{(1)} \end{array} & \text{dla warstwy } l = 1 \\ \\ \begin{array}{l} y_0^{(l)} = y_1^{(l-1)} w_{11}^{(l)} + y_0^{(l-1)} w_{12}^{(l)} \\ y_1^{(l)} = y_1^{(l-1)} w_{21}^{(l)} + y_0^{(l-1)} w_{22}^{(l)} \end{array} & \text{dla warstwy } l = 2, \dots, \frac{L}{2} \end{array} \right. , \quad (3.29)$$

przy czym przy podstawianiu wartości $y_0^{(l-1)}$ należy uwzględnić przesunięcie ciągu wejściowego $\mathbf{x}$ o 2. Ponadto, można ustalić następującą rekurencyjną zależność, pozwalającą obliczyć współczynniki filtrów dolno- i górnoprzepustowego:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{l} \mathbf{h}^{(2)} = [w_{11}^{(1)}, w_{12}^{(1)}] \\ \mathbf{g}^{(2)} = [w_{21}^{(1)}, w_{22}^{(1)}] \end{array} & \text{dla warstwy } l = 1 \\ \\ \begin{array}{l} \mathbf{h}^{(2l)} = [\mathbf{g}^{(2l-2)} w_{11}^{(l)}, 0, 0] + [0, 0, \mathbf{h}^{(2l-2)} w_{12}^{(l)}] \\ \mathbf{g}^{(2l)} = [\mathbf{g}^{(2l-2)} w_{21}^{(l)}, 0, 0] + [0, 0, \mathbf{h}^{(2l-2)} w_{22}^{(l)}] \end{array} & \text{dla warstwy } l = 2, \dots, \frac{L}{2} \end{array} \right. . \quad (3.30)$$

Zależność (3.30) opisuje rekurencyjny algorytm konwersji parametrów struktury kratowej na współczynniki filtrów realizowanych przez tę strukturę. Algorytm ten w sposób trywialny przekształca się do postaci iteracyjnej (ramka Algorytm 1).

Algorytm 1 Iteracyjny algorytm konwersji parametrów struktury kratowej na współczynniki filtrów

- 1: $\mathbf{h}^{(2)} = [w_{11}^{(1)}, w_{12}^{(1)}]$
 - 2: $\mathbf{g}^{(2)} = [w_{21}^{(1)}, w_{22}^{(1)}]$
 - 3: **for** $l = 2$ to $\frac{L}{2}$ **do**
 - 4: $\mathbf{h}^{(2l)} = [\mathbf{g}^{(2l-2)} w_{11}^{(l)}, 0, 0] + [0, 0, \mathbf{h}^{(2l-2)} w_{12}^{(l)}]$
 - 5: $\mathbf{g}^{(2l)} = [\mathbf{g}^{(2l-2)} w_{21}^{(l)}, 0, 0] + [0, 0, \mathbf{h}^{(2l-2)} w_{22}^{(l)}]$
 - 6: **end for**
-

3.4 Realizacja dyskretnego przekształcenia falkowego przy użyciu ortogonalnej struktury kratowej

W podrozdziale 3.1.1 zdefiniowano dwa typy ortogonalnych operacji bazowych: symetryczną S_l (równanie (3.13)) i asymetryczną (równanie (3.14)). W niniejszym podrozdziale zostanie wykazane, że ortogonalna struktura kratowa oparta o obydwa typy operacji bazowych jest w stanie zrealizować dyskretne przekształcenie falkowe, to znaczy filtry $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$ realizowane przez taką strukturę spełniają warunki banku filtrów ortogonalnych, sformułowane w rozdziale 2.5.2. W toku dalszego dowodu wykorzystane zostaną następujące własności funkcji trygonometrycznych:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad , \quad (3.31)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad , \quad (3.32)$$

$$\sin(\alpha) + \cos(\beta) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \quad , \quad (3.33)$$

$$\cos(\alpha) - \sin(\beta) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \quad . \quad (3.34)$$

Ponadto wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\beta_j = \sum_{i=1}^j \alpha_i \quad , \quad (3.35)$$

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^j (-1)^{i+1} \alpha_i \quad . \quad (3.36)$$

3.4.1 Symetryczne ortogonalne operacje bazowe

Rozpatrzmy ortogonalną strukturę kratową opartą o symetryczne operacje bazowe, dane równaniem (3.13). Oznacza to przyjęcie podstawień:

$$\begin{aligned} w_{11}^{(l)} &= \cos(\alpha_l) \quad , \quad w_{12}^{(l)} = \sin(\alpha_l) \quad , \\ w_{21}^{(l)} &= \sin(\alpha_l) \quad , \quad w_{22}^{(l)} = -\cos(\alpha_l) \quad . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dla filtrów $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$, utworzonych zgodnie z zależnościami (3.30) i przy założeniu, że operacja bazowa struktury kratowej jest symetryczna, zostanie wykazane, że:

1. spełnione jest równanie (2.62) ze strony 34, przy czym wymaga to, aby spełniony był warunek:

$$\exists_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l=1}^{L/2} \alpha_l = \frac{\pi}{4} + \left[\left(\frac{L}{2} - 1 \right) \bmod 4 \right] \cdot \frac{\pi}{2} + 2n\pi . \quad (3.38)$$

2. spełnione jest równanie (2.64) ze strony 34 przy czym wymaga to, aby spełniony był warunek (3.38).
3. współczynniki filtru $\mathbf{g}$ spełniają równanie:

$$g_n = (-1)^n h_{L-n-1} , \quad (3.39)$$

dla $n = 0, \dots, L-1$, będące uściśloną wersją równania (2.65) ze strony 35.

4. filtr $\mathbf{h}$ spełnia równanie (2.61) ze strony 34 dla $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, czyli jest ortogonalny względem swoich przesunięć o 2.
5. filtr $\mathbf{g}$ spełnia równanie analogiczne do (2.61), czyli jest ortogonalny względem swoich przesunięć o 2:

$$\sum_{n=0}^{L-1} g_n g_{n+2m} = 0 \text{ dla } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} . \quad (3.40)$$

6. filtry $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$ spełniają równanie (2.66) ze strony 35, czyli są ortogonalne względem siebie.
7. filtry $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$ są unormowane, czyli filtr $\mathbf{h}$ spełnia równanie (2.60) ze strony 34 i filtr $\mathbf{g}$ spełnia analogiczne równanie:

$$\sum_{n=0}^{L-1} g_n^2 = 1 . \quad (3.41)$$

Dowód. Rozpocznijmy od dowiedzenia prawdziwości równań (2.62) i (2.64). Zbadajmy, jaką postać ma suma współczynników filtrów $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$ w zależności od ilości warstw w strukturze kratowej. Dla struktury jednowarstwowej, zgodnie z równaniami (3.30), otrzymujemy:

$$\mathbf{h}^{(2)} = [\cos(\alpha_1), \quad \sin(\alpha_1)] , \quad (3.42)$$

$$\mathbf{g}^{(2)} = [\sin(\alpha_1), -\cos(\alpha_1)] \quad , \quad (3.43)$$

Sprawdźmy, dla jakiego kąta α_1 spełnione jest równanie (2.62):

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1) + \sin(\alpha_1) &= \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_1\right) &= \sqrt{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_1\right) &= 1 \\ \frac{\pi}{4} - \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_1 &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Sprawdźmy, czy otrzymany kąt pozwala na spełnienie równania (2.64):

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad . \quad (3.45)$$

Tak więc, aby równania (2.62) i (2.64) były spełnione dla struktury jednowarstwowej, kąt α_1 w macierzy operacji bazowej S_1 musi mieć wartość $\frac{\pi}{4}$, co stoi w zgodzie z równaniem (3.38).

Zbadajmy, jaką wartość musi mieć suma kątów w struktury dwuwarstwowej, aby realizowany przez nią filtr spełniał równanie (2.62). Korzystając z równań (3.30), oraz wykorzystując rozdzielność dodawania względem mnożenia, można zapisać:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^3 h_n &= [\sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1)] \cos(\alpha_2) + [\sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_1)] \sin(\alpha_2) = \\ &= \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_2) = \\ &= \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \\ &= \sin(\beta_2) - \cos(\beta_2) \quad . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Sprawdźmy, dla jakiego kąta β_2 spełnione jest równanie (2.62):

$$\begin{aligned}
 \sin(\beta_2) - \cos(\beta_2) &= \sqrt{2} \\
 -\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta_2\right) &= \sqrt{2} \\
 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta_2\right) &= -1 \\
 \frac{\pi}{4} + \beta_2 &= \pi \\
 \beta_2 &= \frac{3}{4}\pi
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Suma współczynników filtru górnoprzepustowego $\mathbf{g}^{(4)}$ wyraża się jako:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^3 g_n &= [\sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1)] \sin(\alpha_2) - [\sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_1)] \cos(\alpha_2) = \\
 &= \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) - \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) = \\
 &= -\cos(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \\
 &= -\cos(\beta_2) - \sin(\beta_2) .
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Podstawiając do tego równania kąt $\frac{3}{4}\pi$, otrzymany w wyniku rozwiązania równania (3.47), dostajemy:

$$-\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) - \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 . \tag{3.49}$$

Tak więc dla struktury dwuwarstwowej równania (2.62) i (2.64) są spełnione dla sumy kątów wnoszącej $\frac{3}{4}\pi$, co stoi w zgodzie ze wzorem (3.38).

Przeanalizujemy w analogiczny sposób strukturę trójwarstwową. Przekształcenia (3.46) i (3.48) pokazują, że suma współczynników filtrów $\mathbf{h}^{(4)}$ i $\mathbf{g}^{(4)}$ daje się zapisać w skróconej postaci:

$$\pm \cos(\beta_2) \pm \sin(\beta_2) . \tag{3.50}$$

Opierając się na rozdzielności dodawania względem mnożenia, można wykorzystać wyniki tych przekształceń przy obliczaniu sumy współczynników filtrów $\mathbf{h}^{(6)}$ i $\mathbf{g}^{(6)}$, uzyskanych ze wzoru (3.30):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^5 h_n &= [-\cos(\beta_2) - \sin(\beta_2)] \cos(\alpha_3) + [\sin(\beta_2) - \cos(\beta_2)] \sin(\alpha_3) = \\
&= -\cos(\beta_2) \cos(\alpha_3) - \sin(\beta_2) \cos(\alpha_3) + \sin(\beta_2) \sin(\alpha_3) - \cos(\beta_2) \sin(\alpha_3) = \\
&= -\cos(\beta_2 + \alpha_3) - \sin(\beta_2 + \alpha_3) = \\
&= -\cos(\beta_3) - \sin(\beta_3) .
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Sprawdźmy, dla jakiego kąta β_3 spełnione jest równanie (2.62):

$$\begin{aligned}
-\cos(\beta_3) - \sin(\beta_3) &= \sqrt{2} \\
-\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta_3\right) &= \sqrt{2} \\
\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta_3\right) &= -1 \\
\frac{\pi}{4} - \beta_3 &= \pi \\
\beta_3 &= -\frac{3}{4}\pi
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Ze względu na okresowość funkcji $\cos(\cdot)$, można zapisać:

$$\beta_3 = \frac{5}{4}\pi . \tag{3.53}$$

Suma współczynników filtra górnoprzepustowego $\mathbf{g}^{(6)}$ wyraża się jako:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^5 g_n &= [-\cos(\beta_2) - \sin(\beta_2)] \sin(\alpha_3) - [\sin(\beta_2) - \cos(\beta_2)] \cos(\alpha_3) = \\
&= -\cos(\beta_2) \sin(\alpha_3) - \sin(\beta_2) \sin(\alpha_3) - \sin(\beta_2) \cos(\alpha_3) + \cos(\beta_2) \cos(\alpha_3) = \\
&= -\sin(\beta_2 + \alpha_3) + \cos(\beta_2 + \alpha_3) = \\
&= -\sin(\beta_3) + \cos(\beta_3) .
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Podstawiając do tego równania kąt $\frac{5}{4}\pi$, otrzymany w wyniku rozwiązania równania (3.52), dostajemy:

$$-\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) + \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 . \tag{3.55}$$

Tak więc dla struktury trójwarstwowej równania (2.62) i (2.64) są spełnione dla sumy kątów wnoszącej $\frac{5}{4}\pi$, co stoi w zgodzie ze wzorem (3.38).

Przystąpmy do analizy struktury o czterech warstwach. Postępując analogicznie jak poprzednio, podstawiamy sumy współczynników filtrów $\mathbf{h}^{(6)}$ i $\mathbf{g}^{(6)}$, dane wzorami (3.51) i (3.54), do równania (3.30) i obliczmy sumę współczynników filtru $\mathbf{h}^{(8)}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^7 h_n &= [-\sin(\beta_3) + \cos(\beta_3)] \cos(\alpha_4) + [-\cos(\beta_3) - \sin(\beta_3)] \sin(\alpha_4) = \\
 &= -\sin(\beta_3) \cos(\alpha_4) + \cos(\beta_3) \cos(\alpha_4) - \cos(\beta_3) \sin(\alpha_4) - \sin(\beta_3) \sin(\alpha_4) = \quad (3.56) \\
 &= -\sin(\beta_3 + \alpha_4) + \cos(\beta_3 + \alpha_4) = \\
 &= -\sin(\beta_4) + \cos(\beta_4) \quad .
 \end{aligned}$$

Sprawdźmy, dla jakiego kąta β_4 spełnione jest równanie (2.62):

$$\begin{aligned}
 -\sin(\beta_4) + \cos(\beta_4) &= \sqrt{2} \\
 \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta_4\right) &= \sqrt{2} \\
 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta_4\right) &= 1 \quad (3.57) \\
 \frac{\pi}{4} + \beta_4 &= 0 \\
 \beta_4 &= -\frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Ze względu na okresowość funkcji $\cos(\cdot)$, można zapisać:

$$\beta_4 = \frac{7}{4}\pi \quad . \quad (3.58)$$

Suma współczynników filtru górnoprzepustowego $\mathbf{g}^{(8)}$ wyraża się jako:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^7 g_n &= [-\sin(\beta_3) + \cos(\beta_3)] \sin(\alpha_4) - [-\cos(\beta_3) - \sin(\beta_3)] \cos(\alpha_4) = \\
 &= -\sin(\beta_3) \sin(\alpha_4) + \cos(\beta_3) \sin(\alpha_4) + \cos(\beta_3) \cos(\alpha_4) + \sin(\beta_3) \cos(\alpha_4) = \quad (3.59) \\
 &= \cos(\beta_3 + \alpha_4) + \sin(\beta_3 + \alpha_4) = \\
 &= \cos(\beta_4) + \sin(\beta_4) \quad .
 \end{aligned}$$

Podstawiając do tego równania kąt $\frac{7}{4}\pi$, otrzymany w wyniku rozwiązania równania (3.57), dostajemy:

$$\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad . \quad (3.60)$$

Tak więc dla struktury czterowarstwowej równania (2.62) i (2.64) są spełnione dla sumy kątów wnoszącej $\frac{7}{4}\pi$, co stoi w zgodzie ze wzorem (3.38).

Przeanalizujmy strukturę pięciowarstwową. Podstawmy sumy współczynników filtrów $\mathbf{g}^{(8)}$ i $\mathbf{g}^{(8)}$, dane wzorami (3.56) i (3.59), do równania (3.30) i obliczmy sumę współczynników filtru $\mathbf{h}^{(10)}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^9 h_n &= [\cos(\beta_4) + \sin(\beta_4)] \cos(\alpha_5) + [\cos(\beta_4) - \sin(\beta_4)] \sin(\alpha_5) = \\ &= \cos(\beta_4) \cos(\alpha_5) + \sin(\beta_4) \cos(\alpha_5) + \cos(\beta_4) \sin(\alpha_5) - \sin(\beta_4) \sin(\alpha_5) = \quad (3.61) \\ &= \cos(\beta_4 + \alpha_5) + \sin(\beta_4 + \alpha_5) = \\ &= \cos(\beta_5) + \sin(\beta_5) \quad . \end{aligned}$$

Zauważmy, że suma współczynników filtru dolnoprzepustowego dla struktury pięciowarstwowej wyraża się takim samym wzorem, jak dla struktury jednowarstwowej. Oznacza to, że dla struktury o pięciu warstwach wzór (2.62) jest spełniony dla kąta $\beta_5 = \beta_1 = \frac{\pi}{4}$. Obliczmy sumę współczynników filtru górnoprzepustowego $\mathbf{g}^{(10)}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^9 g_n &= [\cos(\beta_4) + \sin(\beta_4)] \sin(\alpha_5) - [\cos(\beta_4) - \sin(\beta_4)] \cos(\alpha_5) = \\ &= \cos(\beta_4) \sin(\alpha_5) + \sin(\beta_4) \sin(\alpha_5) - \cos(\beta_4) \cos(\alpha_5) + \sin(\beta_4) \cos(\alpha_5) = \quad (3.62) \\ &= \sin(\beta_4 + \alpha_5) - \cos(\beta_4 + \alpha_5) = \\ &= \sin(\beta_5) - \cos(\beta_5) \quad . \end{aligned}$$

Zauważmy, że suma współczynników filtru górnoprzepustowego dla struktury pięciowarstwowej wyraża się takim samym wzorem, jak dla struktury jednowarstwowej. Oznacza to, że dla struktury o pięciu warstwach wzór (2.64) jest spełniony dla kąta $\beta_5 = \beta_1 = \frac{\pi}{4}$.

Ponieważ dla struktury pięciowarstwowej suma współczynników obu filtrów wyraża się identycznymi wzorami jak dla struktury jednowarstwowej, to dokładanie do struktury kratowej kolejnych warstw będzie dawało wyniki identyczne

z uzyskanymi wcześniej dla struktury jedno, dwu, trzy i czterowarstwowej. Tym samym zostało dowiedzione, że filtry dolno i górnoprzepustowy, realizowane przez strukturę kratową o symetrycznych operacjach bazowych, spełniają warunki (2.62) i (2.64), przy czym wymaga to spełnienia dodatkowego założenia w postaci wzoru (3.38).

Prawdziwość zależności (3.39) dla filtrów $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$, utworzonych zgodnie z równaniami (3.30), zostanie dowiedziona przy użyciu zasady indukcji matematycznej. Wykazana zostanie prawdziwość następujących tez:

1. filtry $\mathbf{h}^{(2)}$ i $\mathbf{g}^{(2)}$, utworzone wg. wzoru (3.30) przy użyciu podstawień (3.37), spełniają zależność (3.39),
2. z faktu, że filtry $\mathbf{h}^{(L)}$ i $\mathbf{g}^{(L)}$ spełniają zależność (3.39) wynika, że filtry $\mathbf{h}^{(L+2)}$ i $\mathbf{g}^{(L+2)}$ również spełniają tę zależność.

Udowodnijmy prawdziwość pierwszej tezy. Przypomnijmy, że zgodnie z równaniami (3.30) i podstawieniem (3.37), filtry $\mathbf{h}^{(2)}$ i $\mathbf{g}^{(2)}$ mają postać:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{(2)} &= [\cos(\alpha_1), \sin(\alpha_1)] , \\ \mathbf{g}^{(2)} &= [\sin(\alpha_1), -\cos(\alpha_1)] .\end{aligned}$$

Łatwo widać, że współczynniki filtru $\mathbf{g}^{(2)}$ powstają poprzez odwrócenie kolejności współczynników w filtrze $\mathbf{h}^{(2)}$ i zmianę znaku drugiego z tych współczynników:

$$\begin{aligned}g_0 &= (-1)^0 h_{2-0-1} = h_1 = \sin(\alpha_1) , \\ g_1 &= (-1)^1 h_{2-1-1} = -h_0 = -\cos(\alpha_1) ,\end{aligned}\tag{3.63}$$

co dowodzi prawdziwości pierwszej tezy. Wykażmy teraz prawdziwość drugiej tezy. Załóżmy, że jest ona prawdziwa dla filtru o długości L , a więc pomiędzy współczynnikami h_n i g_n zachodzą zależności:

$$\begin{aligned}
g_0 &= h_{L-1} , \\
g_1 &= -h_{L-2} , \\
g_2 &= h_{L-3} , \\
&\vdots \\
g_{L-3} &= -h_2 , \\
g_{L-2} &= h_1 , \\
g_{L-1} &= -h_0 .
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Wykazane zostanie, że na podstawie założenia indukcyjnego (3.64), z wzoru (3.30) uzyskuje się współczynniki spełniające zależność (3.39). Zgodnie z wzorami (3.30), przy zastosowaniu podstawienia (3.37), współczynniki filtru $\mathbf{g}^{(L+2)}$ przyjmują wartość¹:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^{(L+2)} &= [g_0 \sin(\alpha), g_1 \sin(\alpha), g_2 \sin(\alpha) - h_0 \cos(\alpha), \\
&g_3 \sin(\alpha) - h_1 \cos(\alpha), \dots, g_{L-2} \sin(\alpha) - h_{L-4} \cos(\alpha), \\
&g_{L-1} \sin(\alpha) - h_{L-3} \cos(\alpha), -h_{L-2} \cos(\alpha), -h_{L-1} \cos(\alpha)] \stackrel{(3.64)}{=} \\
&= [h_{L-1} \sin(\alpha), -h_{L-2} \sin(\alpha), h_{L-3} \sin(\alpha) - h_0 \cos(\alpha), \\
&-h_{L-4} \sin(\alpha) - h_1 \cos(\alpha), \dots, h_1 \sin(\alpha) - h_{L-4} \cos(\alpha), \\
&-h_0 \sin(\alpha) - h_{L-3} \cos(\alpha), -h_{L-2} \cos(\alpha), -h_{L-1} \cos(\alpha)] .
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Zgodnie ze wzorem (3.30) i podstawieniem (3.37), współczynniki filtru $\mathbf{h}^{(L+2)}$ przyjmują wartość:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}^{(L+2)} &= [g_0 \cos(\alpha), g_1 \cos(\alpha), g_2 \cos(\alpha) + h_0 \sin(\alpha), \\
&g_3 \cos(\alpha) + h_1 \sin(\alpha), \dots, g_{L-2} \cos(\alpha) + h_{L-4} \sin(\alpha), \\
&g_{L-1} \cos(\alpha) + h_{L-3} \sin(\alpha), h_{L-2} \sin(\alpha), h_{L-1} \sin(\alpha)] \stackrel{(3.64)}{=} \\
&= [h_{L-1} \cos(\alpha), -h_{L-2} \cos(\alpha), h_{L-3} \cos(\alpha) + h_0 \sin(\alpha), \\
&-h_{L-4} \cos(\alpha) + h_1 \sin(\alpha), \dots, h_1 \cos(\alpha) + h_{L-4} \sin(\alpha), \\
&-h_0 \cos(\alpha) + h_{L-3} \sin(\alpha), h_{L-2} \sin(\alpha), h_{L-1} \sin(\alpha)] .
\end{aligned} \tag{3.66}$$

¹W celu uczynienia zapisu bardziej czytelnym, w poniższych wzorach kąt α_{L+1} jest zapisywany jako α .

Odwróćmy kolejność współczynników filtru $\mathbf{h}^{(L+2)}$, wyrażonych wzorem (3.66):

$$\begin{aligned} & [h_{L-1} \sin(\alpha), h_{L-2} \sin(\alpha), h_{L-3} \sin(\alpha) - h_0 \cos(\alpha), \\ & h_{L-4} \sin(\alpha) + h_1 \cos(\alpha), \dots, h_1 \sin(\alpha) - h_{L-4} \cos(\alpha), \\ & h_0 \sin(\alpha) + h_{L-3} \cos(\alpha), -h_{L-2} \cos(\alpha), h_{L-1} \cos(\alpha)] . \end{aligned} \quad (3.67)$$

Zmieńmy znak parzystych współczynników² filtru wyrażonego wzorem (3.67):

$$\begin{aligned} & [h_{L-1} \sin(\alpha), -h_{L-2} \sin(\alpha), h_{L-3} \sin(\alpha) - h_0 \cos(\alpha), \\ & -h_{L-4} \sin(\alpha) - h_1 \cos(\alpha), \dots, h_1 \sin(\alpha) - h_{L-4} \cos(\alpha), \\ & -h_0 \sin(\alpha) - h_{L-3} \cos(\alpha), -h_{L-2} \cos(\alpha), -h_{L-1} \cos(\alpha)] . \end{aligned} \quad (3.68)$$

Widać, że współczynniki wyrażone wzorami (3.65) i (3.68) są identyczne. Założenie, że filtry $\mathbf{h}^{(L)}$ i $\mathbf{g}^{(L)}$ spełniają zależność (3.39) prowadzi do wniosku, że filtry $\mathbf{h}^{(L+2)}$ i $\mathbf{g}^{(L+2)}$ również tą zależność spełniają. Tym samym, na mocy zasady indukcji matematycznej, dowiedzione zostało, że filtry $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$, utworzone przy użyciu wzorów (3.30), spełniają zależność (3.39).

Przejdźmy do dowodu ortogonalności filtru $\mathbf{h}$ względem swoich przesunięć o 2 (równanie (2.61)), filtru $\mathbf{h}$ względem filtru $\mathbf{g}$ i jego przesunięć o 2 (równanie (2.66)) oraz filtru $\mathbf{g}$ względem swoich przesunięć o 2 (równanie (3.40)). Rozpocznijmy od wykazania, że jeśli spełniona jest zależność (3.39), to równanie (2.66) także jest prawdziwe³. Następnie wykazane zostanie, że przyjęcie założenia o prawdziwości równania (2.61) pozwala wykazać prawdziwość równania (3.40). Na końcu zostanie dowiedzione, że filtr $\mathbf{h}$ utworzony na podstawie równania (3.30) spełnia równanie (2.61).

Rozpocznijmy od dowodu równania (2.66):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{L-1} h_n g_{n+2m} & \stackrel{(3.39)}{=} \sum_{n=0}^{L-1} h_n (-1)^{n+2m} h_{L-(n+2m)-1} = \\ & \sum_{n=0,2,\dots}^{L-2} h_n h_{L-n-2m-1} - \sum_{n=1,3,\dots}^{L-1} h_n h_{L-n-2m-1} . \end{aligned} \quad (3.69)$$

²Należy zauważyć, że parzyste współczynniki filtru - drugi, czwarty itd. - indeksowane są liczbami nieparzystymi. Pierwszy współczynnik filtru ma indeks 0, drugi współczynnik filtru ma indeks 1 itd.

³Teza ta została sformułowana na stronie 35.

Powyższe równanie ma dawać w wyniku 0, co będzie miało miejsce, jeśli obie sumy będą sobie równe (warunek wystarczający):

$$\sum_{n=0}^{L-2} h_n h_{L-n-2m-1} = \sum_{n=1}^{L-1} h_n h_{L-n-2m-1} . \quad (3.70)$$

Rozpisując sumy po obu stronach znaku równości, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & h_0 h_{L-1-2m} + h_2 h_{L-3-2m} + \dots + \\ & \quad + h_{L-4} h_{3-2m} + h_{L-2} h_{1-2m} = \\ & = h_1 h_{L-2-2m} + h_3 h_{L-4-2m} + \dots + \\ & \quad + h_{L-3} h_{2-2m} + h_{L-1} h_{-2m} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Zauważmy, że w równaniu (3.71), ilość składników po obu stronach znaku równości jest identyczna. Ponadto indeksy niektórych współczynników filtrów przyjmują wartości wykraczające poza zakres filtru (mniej niż 0 albo więcej niż $L-1$). Takie współczynniki przyjmują wartość 0. Tym samym, dla $m \geq 0$, m ostatnich składników sum po obu stronach znaku równości zeruje się. Dla $m > \frac{L}{2} - 1$ wszystkie składniki obu sum się zerują i tym samym równanie jest spełnione. Podobnie, dla $m < 0$, m pierwszych składników sum po obu stronach znaku równości zeruje się. Dla $m < -\frac{L}{2} + 1$ wszystkie składniki obu sum zerują się i tym samym równanie jest spełnione. W pozostałych przypadkach – dla $m \in \{-\frac{L}{2} + 1, \dots, \frac{L}{2} - 1\}$ – po obu stronach znaku równości znajduje się $\frac{L}{2} - |m|$ składników. A zatem, jeśli dla $m \in \{0, \dots, \frac{L}{2} - 1\}$ usuniemy m ostatnich składników po obu stronach równania, to (3.71) otrzymamy równanie:

$$\begin{aligned} & h_0 h_{L-1-2m} + h_2 h_{L-3-2m} + \dots + \\ & \quad + h_{L-4-2m} h_3 + h_{L-2-2m} h_1 = \\ & = h_1 h_{L-2-2m} + h_3 h_{L-4-2m} + \dots + \\ & \quad + h_{L-3-2m} h_2 + h_{L-1-2m} h_0 , \end{aligned} \quad (3.72)$$

które jest równaniem tożsamościowym: pierwszy składnik po lewej stronie równości jest identyczny z ostatnim składnikiem po prawej stronie, drugi składnik po lewej identyczny z przedostatnim po prawej itd. Analogicznie, dla przypadku $m \in \{-\frac{L}{2} + 1, \dots, -1\}$, usuwając m pierwszych wyrazów obu sum, równanie (3.71) przekształca się do postaci:

$$\begin{aligned}
 & h_{-2m}h_{L-1} + h_{2-2m}h_{L-3} + \dots + \\
 & \quad + h_{L-4}h_{3-2m} + h_{L-2}h_{1-2m} = \\
 & = h_{1-2m}h_{L-2} + h_{3-2m}h_{L-4} + \dots + \\
 & \quad + h_{L-3}h_{2-2m} + h_{L-1}h_{-2m}
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Równanie (3.73) również jest tożsamościowe. Tym samym dowiedzione zostało, że równanie (2.66) jest spełnione dla filtrów $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$ spełniających zależność (3.39).

Udowodnijmy teraz prawdziwość równania (3.40):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{L-1} g_n g_{n+2m} \stackrel{(3.39)}{=} \\
 & = \sum_{n=0}^{L-1} (-1)^n h_{L-n-1} (-1)^{n+2m} h_{L-(n+2m)-1} = \\
 & \quad = \sum_{n=0}^{L-1} (-1)^{2(n+m)} h_{L-n-1} h_{L-n-2m-1} = \\
 & \quad = \sum_{n=0}^{L-1} h_{L-n-1} h_{L-n-2m-1} .
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Stosując w powyższym równaniu podstawienie $k = L - n - 1$ otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{L-1} h_{L-n-1} h_{L-n-2m-1} = \sum_{k=L-1}^0 h_k h_{k-2m} , \tag{3.75}$$

przy czym oczekujemy, że wartość tej sumy zawsze wynosi 0. Powyższe równanie jest tożsame z równaniem (2.61). A zatem filtr $\mathbf{g}$, spełniający zależność (3.39), jest ortogonalny względem swoich przesunięć o 2, jeśli prawdziwe jest równanie (2.61).

Wykażmy zatem, że dla filtru $\mathbf{h}$, utworzonego przy użyciu wzorów (3.30), spełnione jest równanie (2.61) ze strony 34. Dowód zostanie przeprowadzony przy użyciu zasady indukcji matematycznej. Wykazana zostanie prawdziwość następujących tez:

1. filtr $\mathbf{h}^{(2)}$, utworzony wg. wzoru (3.30), spełnia warunek (2.61),
2. z faktu, że filtr $\mathbf{h}^{(L)}$ spełnia zależność (2.61) wynika, że filtr $\mathbf{h}^{(L+2)}$ również spełnia tę zależność.

Udowodnijmy prawdziwość pierwszej tezy. Filtr $\mathbf{h}^{(L)}$ ma długość 2, a zatem po przesunięciu go względem siebie o 2 (bądź wielokrotność) żadne niezerowe współczynniki filtru nie będą na siebie zachodzić. Tym samym teza pierwsza jest automatycznie spełniona. Wykażmy teraz prawdziwość drugiej tezy. Przypomnijmy, że – na mocy wzoru (3.30) – współczynniki filtru $\mathbf{h}^{(L+2)}$ wyrażają się jako⁴:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(L+2)} = [& g_0 \cos(\alpha), g_1 \cos(\alpha), g_2 \cos(\alpha) + h_0 \sin(\alpha), \\ & g_3 \cos(\alpha) + h_1 \sin(\alpha), \dots, g_{L-1} \cos(\alpha) + h_{L-3} \sin(\alpha), \\ & h_{L-2} \sin(\alpha), h_{L-1} \sin(\alpha)] . \end{aligned} \quad (3.76)$$

Rozpiszmy wzór (2.61) dla filtru $\mathbf{h}^{(L+2)}$, przy założeniu, że $m \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{L-1} h_n h_{n+2m} & \stackrel{(3.76)}{=} [g_0 \cos(\alpha)] [g_{2m} \cos(\alpha) + h_{2m-2} \sin(\alpha)] + \\ & + [g_1 \cos(\alpha)] [g_{2m+1} \cos(\alpha) + h_{2m-1} \sin(\alpha)] + \\ & + [g_2 \cos(\alpha) + h_0 \sin(\alpha)] [g_{2m+2} \cos(\alpha) + h_{2m} \sin(\alpha)] + \dots + \\ & + [g_{L-2m-1} \cos(\alpha) + h_{L-2m-3} \sin(\alpha)] \cdot \\ & \cdot [g_{L-1} \cos(\alpha) + h_{L-3} \sin(\alpha)] + \\ & + [g_{L-2m} \cos(\alpha) + h_{L-2m-2} \sin(\alpha)] [h_{L-2} \sin(\alpha)] + \\ & + [g_{L-2m+1} \cos(\alpha) + h_{L-2m-1} \sin(\alpha)] [h_{L-1} \sin(\alpha)] . \end{aligned} \quad (3.77)$$

Po wymnożeniu nawiasów otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & g_0 g_{2m} \cos^2(\alpha) + g_0 h_{2m-2} \cos(\alpha) \sin(\alpha) + \\ & + g_1 g_{2m+1} \cos^2(\alpha) + g_1 h_{2m-1} \cos(\alpha) \sin(\alpha) + \\ & + g_2 g_{2m+2} \cos^2(\alpha) + h_0 h_{2m} \sin^2(\alpha) + \\ & + [g_2 h_{2m} + h_0 g_{2m+2}] \cos(\alpha) \sin(\alpha) + \dots + \\ & + g_{L-2m-1} g_{L-1} \cos^2(\alpha) + h_{L-2m-3} g_{L-3} \sin^2(\alpha) + \\ & + [g_{L-2m-1} h_{L-3} + h_{L-2m-3} g_{L-1}] \cos(\alpha) \sin(\alpha) + \\ & + g_{L-2m} h_{L-2} \cos(\alpha) \sin(\alpha) + h_{L-2m-2} h_{L-2} \sin^2(\alpha) + \\ & + g_{L-2m+1} h_{L-1} \cos(\alpha) \sin(\alpha) + h_{L-2m-1} h_{L-1} \sin^2(\alpha) . \end{aligned} \quad (3.78)$$

⁴Ponownie przyjęto uproszczenie zapisu, przez użycie oznaczenia α , zamiast α_{L+1}

Grupując wyrazy otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 & \cos^2(\alpha) [g_0 g_{2m} + g_1 g_{2m+1} + g_2 g_{2m+2} + \dots + \\
 & \quad + g_{L-2m-1} g_{L-1}] + \sin^2(\alpha) [h_0 h_{2m} + \dots + \\
 & \quad + h_{L-2m-3} h_{L-3} + h_{L-2m-2} h_{L-2} + h_{L-2m-1} h_{L-1}] + \\
 & \cos(\alpha) \sin(\alpha) [g_0 h_{2m-2} + g_1 h_{2m-1} + g_2 h_{2m} + \dots + \\
 & \quad + g_{L-2m-1} h_{L-3} + g_{L-2m} h_{L-2} + g_{L-2m+1} h_{L-1}] + \\
 & \cos(\alpha) \sin(\alpha) [h_0 g_{2m+2} + \dots + h_{L-2m-3} g_{L-1}] ,
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

co można zapisać w bardziej zwartej postaci

$$\begin{aligned}
 & \cos^2(\alpha) \left[\sum_{n=0}^{L-2m-1} g_n g_{n+2m} \right] + \\
 & + \sin^2(\alpha) \left[\sum_{n=0}^{L-2m-1} h_n h_{n+2m} \right] + \\
 & + \cos(\alpha) \sin(\alpha) \left[\sum_{n=0}^{L-2m+1} g_n h_{n+2m-2} \right] + \\
 & + \cos(\alpha) \sin(\alpha) \left[\sum_{n=0}^{L-2m-3} g_n h_{n+2m+2} \right] .
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Na potrzeby dowodu indukcyjnego, założono prawdziwość równania (2.61) dla filtru $\mathbf{h}^{(L)}$, a zatem wyrażenie $\sum_{n=0}^{L-2m-1} h_n h_{n+2m}$ stojące przy $\sin^2(\alpha)$ przyjmuje wartość 0. Jak wykazano wcześniej, równanie (3.40) jest prawdziwe, jeśli spełnione jest równanie (2.61), a zatem równanie (3.40) jest prawdziwe dla filtru $\mathbf{g}^{(L)}$ na mocy założenia indukcyjnego. Tym samym wyrażenie $\sum_{n=0}^{L-2m-1} g_n g_{n+2m}$ stojące przy $\cos^2(\alpha)$ również się zeruje. We wcześniejszej części dowodu wykazano również, że filtry $\mathbf{h}^{(L)}$ i $\mathbf{g}^{(L)}$ są ortogonalne względem swoich przesunięć o 2 (równanie (2.66)). Tym samym wyrażenia $\sum_{n=0}^{L-2m+1} g_n h_{n+2m-2}$ oraz $\sum_{n=0}^{L-2m-3} g_n h_{n+2m+2}$ stojące przy $\cos(\alpha) \sin(\alpha)$ zerują się. Oznacza to, że równanie (3.80) ma zawsze wartość zero. Tym samym, na mocy zasady indukcji, wykazano, że jeśli filtr $\mathbf{h}^{(L)}$ spełnia równanie (2.61), to filtr $\mathbf{h}^{(L+2)}$, utworzony przy użyciu równania (3.30), również to równanie spełnia. Tym samym prawdziwe jest również równanie (3.40).

Pozostało wykazać unormowanie filtrów $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$. Wykorzystajmy udowodnioną wcześniej zależność (3.39) do zbadania, kiedy filtr $\mathbf{g}$ jest unormowany (równanie (3.41)):

$$\sum_{n=0}^L g_n^2 \stackrel{(3.39)}{=} \sum_{n=0}^L [(-1)^n h_{L-n-1}]^2 = \sum_{n=0}^L [(-1)^{2n} h_{L-n-1}^2] = \sum_{n=0}^L h_{L-n-1}^2 \stackrel{(2.60)}{=} 1 . \quad (3.81)$$

A zatem równanie (3.41) jest spełnione, jeśli spełnione jest równanie (2.60). Wykażmy więc, że filtr $\mathbf{h}$, utworzony na podstawie równania (3.30), spełnia równanie (2.60), a więc jest unormowany. W tym celu posłużmy się zasadą indukcji matematycznej. Wykazana zostanie prawdziwość następujących tez:

1. filtr $\mathbf{h}^{(2)}$, utworzony wg. wzoru (3.30), spełnia warunek (2.60),
2. z faktu, że filtr $\mathbf{h}^{(L)}$ spełnia zależność (2.60) wynika, że filtr $\mathbf{h}^{(L+2)}$ również spełnia tą zależność.

Przypomnijmy, że współczynniki filtru $\mathbf{h}^{(2)}$ wyrażają się wzorem:

$$\mathbf{h}^{(2)} = [\cos(\alpha_1), \sin(\alpha_1)] .$$

Obliczmy wartość równania (2.60) dla filtru $\mathbf{h}^{(2)}$:

$$\sum_{n=0}^{L-1} h_n^2 = \cos^2(\alpha_1) + \sin^2(\alpha_1) = 1 . \quad (3.82)$$

A zatem filtr $\mathbf{h}^{(2)}$ jest unormowany. Udowodnijmy prawdziwość drugiej tezy. Obliczmy wartość równania (2.60) dla filtru $\mathbf{h}^{(L+2)}$ (współczynniki tego filtru dane są równaniem (3.76)), rozpisując wzór na sumę kwadratów współczynników tego filtra:

$$\begin{aligned} & g_0^2 \cos^2(\alpha) + g_1^2 \cos^2(\alpha) + \\ & + g_2^2 \cos^2(\alpha) + 2g_2 h_0 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + h_0^2 \sin^2(\alpha) + \dots + \\ & + g_{L-1}^2 \cos^2(\alpha) + 2g_{L-1} h_{L-3} \sin(\alpha) \cos(\alpha) + \\ & + h_{L-3}^2 \sin^2(\alpha) + h_{L-2}^2 \sin^2(\alpha) + h_{L-1}^2 \sin^2(\alpha) . \end{aligned} \quad (3.83)$$

Grupując wyrazy otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 & \cos^2(\alpha) [g_0^2 + g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_{L-1}^2] + \\
 & \sin^2(\alpha) [h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_{L-1}^2] + \\
 & + 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) [h_0 g_2 + h_1 g_3 + \dots + h_{L-3} g_{L-1}] = \\
 & = \cos^2(\alpha) \left[\sum_{n=0}^{L-1} g_n^2 \right] + \sin^2(\alpha) \left[\sum_{n=0}^{L-1} h_n^2 \right] + \\
 & 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \left[\sum_{n=0}^{L-3} h_n g_{n+2} \right] .
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Na mocy założenia indukcyjnego, wyrażenie $\sum_{n=0}^{L-1} h_n^2$ przyjmuje wartość 1. Wcześniej wykazano, że jeśli spełnione jest równanie (2.60), to równanie (3.41) również jest spełnione, a zatem – na mocy założenia indukcyjnego – wyrażenie $\sum_{n=0}^{L-1} g_n^2$ również przyjmuje wartość 1. Jak wcześniej wykazano, filtry $\mathbf{h}^{(L)}$ i $\mathbf{g}^{(L)}$ utworzone na podstawie równania (3.30) są względem siebie ortogonalne, tak więc wyrażenie $\sum_{n=0}^{L-3} h_n g_{n+2}$ w równaniu (3.84) przyjmuje wartość 0. Tym samym równanie (3.84) sprowadza się do jedynki trygonometrycznej. Wykazano więc, że jeśli filtr $\mathbf{h}^{(L)}$ jest unormowany, to filtr $\mathbf{h}^{(L+2)}$, utworzony przy użyciu równania (3.30), również jest unormowany. Oznacza to, że filtr $\mathbf{g}^{(L+2)}$ także jest unormowany, zgodnie z wykazaną wcześniej zależnością (3.81).

Tym samym wykazane zostało, że filtry dolnoprzepustowy $\mathbf{h}$ i górnoprzepustowy $\mathbf{g}$ realizowane przez ortogonalną strukturę kratową, opartą o symetryczne operacje bazowe, spełniają warunki na bank filtrów ortogonalnych, określone w rozdziale 2.5.2. $\square$

3.4.2 Asymetryczne ortogonalne operacje bazowe

Rozpatrzmy ortogonalną strukturę kratową opartą o asymetryczne operacje bazowe, dane równaniem (3.14). Oznacza to przyjęcie podstawień:

$$\begin{aligned}
 w_{11}^{(l)} &= \cos(\alpha_l) \quad , \quad w_{12}^{(l)} = \sin(\alpha_l) \quad , \\
 w_{21}^{(l)} &= -\sin(\alpha_l) \quad , \quad w_{22}^{(l)} = \cos(\alpha_l) \quad .
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Dla filtrów $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$, utworzonych zgodnie z równaniami (3.30) i przy założeniu, że operacja bazowa struktury kratowej jest asymetryczna, zostanie wykazane, że:

1. spełnione jest równanie (2.62) ze strony 34, przy czym wymaga to, aby spełniony był warunek:

$$\sum_{l=1}^{L/2} (-1)^{l+1} \alpha_l = (-1)^{(L/2+1)} \cdot \frac{\pi}{4} . \quad (3.86)$$

2. spełnione jest równanie (2.64) ze strony 34, przy czym wymaga to, aby spełniony był warunek (3.86).
3. współczynniki filtru $\mathbf{g}$ spełniają równanie:

$$g_n = -(-1)^n h_{L-n-1} = (-1)^{n+1} h_{L-n-1} , \quad (3.87)$$

w przypadku gdy struktura kratowa ma nieparzystą ilość warstw. W przypadku gdy struktura kratowa ma parzystą ilość warstw, współczynniki filtru $\mathbf{g}$ spełniają równanie (3.39) ze strony 71.

4. filtr $\mathbf{h}$ spełnia równanie (2.61) ze strony 34 dla $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, czyli jest ortogonalny względem swoich przesunięć o 2.
5. filtr $\mathbf{g}$ spełnia równanie (3.40) ze strony 71 dla $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, czyli jest ortogonalny względem swoich przesunięć o 2.
6. filtry $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$ spełniają równanie (2.66) ze strony 35, czyli są ortogonalne względem siebie.
7. filtry $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$ są unormowane, czyli filtr $\mathbf{h}$ spełnia równanie (2.60) ze strony 34, a filtr $\mathbf{g}$ spełnia równanie (3.41) ze strony 71.

Dowód. Rozpoczynamy od dowiedzenia prawdziwości równań (2.62) i (2.64) w sposób analogiczny, jak to miało miejsce dla struktury o symetrycznych operacjach bazowych. Zgodnie z równaniami (3.30), filtry realizowane przez jednowarstwową strukturę o asymetrycznych ortogonalnych operacjach bazowych mają postać:

$$\mathbf{h}^{(2)} = [\cos(\alpha_1), \sin(\alpha_1)] , \quad (3.88)$$

$$\mathbf{g}^{(2)} = [-\sin(\alpha_1), \cos(\alpha_1)] , \quad (3.89)$$

Jak wykazano w przekształceniu (3.44) na stronie 72, równanie (2.62) jest spełnione dla kąta $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$. Podstawiamy ten kąt do równania (2.64) dla filtru $\mathbf{g}^{(2)}$ danego równaniem (3.89):

$$-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad . \quad (3.90)$$

Tak więc, aby równania (2.62) i (2.64) były spełnione dla sieci jednowarstwowej, kąt α_1 w macierzy operacji bazowej F_1 musi mieć wartość $\frac{\pi}{4}$, co stoi w zgodzie z równaniem (3.86).

Zbadajmy, jaką wartość muszą mieć kąty w sieci dwuwarstwowej, aby realizowany przez nią filtr spełniał równanie (2.62). Na podstawie równań (3.30), oraz wykorzystując rozdzielnosć dodawania względem mnożenia, można zapisać:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^3 h_n &= [\cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_1)] \cos(\alpha_2) + [\cos(\alpha_1) + \sin(\alpha_1)] \sin(\alpha_2) = \\ &= \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) = \\ &= -\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \\ &= -\sin(\gamma_2) + \cos(\gamma_2) \quad . \end{aligned} \quad (3.91)$$

Jak pokazano w przekształceniu (3.57), równanie

$$-\sin(\gamma_2) + \cos(\gamma_2) = \sqrt{2}$$

jest spełnione dla $\gamma_2 = -\frac{\pi}{4}$. Suma współczynników filtra górnoprzepustowego $\mathbf{g}^{(4)}$ wyraża się jako:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^3 g_n &= -[\cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_1)] \sin(\alpha_2) + [\cos(\alpha_1) + \sin(\alpha_1)] \cos(\alpha_2) = \\ &= -\cos(\alpha_1) \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2) = \\ &= \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \\ &= \sin(\gamma_2) + \cos(\gamma_2) \quad . \end{aligned} \quad (3.92)$$

Podstawiając do tego równania kąt $-\frac{\pi}{4}$, otrzymany dla filtra dolnoprzepustowego, dostajemy:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad . \quad (3.93)$$

Tak więc dla sieci dwuwarstwowej równania (2.62) i (2.64) są spełnione gdy różnica $\alpha_1 - \alpha_2$ wynosi $-\frac{\pi}{4}$, co stoi w zgodzie ze wzorem (3.86).

Przeanalizujemy strukturę trójwarstwową. Postępując w sposób analogiczny, jak dla struktury z asymetrycznymi operacjami bazowymi, wykorzystuje się wyniki przekształceń (3.91) i (3.92) przy obliczaniu sumy współczynników filtrów $\mathbf{h}^{(6)}$ i $\mathbf{g}^{(6)}$, uzyskanych ze wzoru (3.30):

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^5 h_n &= [\cos(\gamma_2) + \sin(\gamma_2)] \cos(\alpha_3) + [-\sin(\gamma_2) + \cos(\gamma_2)] \sin(\alpha_3) = \\
 &= \cos(\gamma_2) \cos(\alpha_3) + \sin(\gamma_2) \cos(\alpha_3) - \sin(\gamma_2) \sin(\alpha_3) + \cos(\gamma_2) \sin(\alpha_3) = \quad (3.94) \\
 &= \cos(\gamma_2 + \alpha_3) + \sin(\gamma_2 + \alpha_3) = \\
 &= \cos(\gamma_3) + \sin(\gamma_3) \quad .
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że suma współczynników filtru dolnoprzepustowego dla struktury trójwarstwowej wyraża się takim samym wzorem, jak dla struktury jednowarstwowej. Oznacza to, że dla struktury o trzech warstwach wzór (2.62) jest spełniony dla kąta $\gamma_3 = \gamma_1 = \frac{\pi}{4}$. Obliczmy sumę współczynników filtru górnoprzepustowego $\mathbf{g}^{(6)}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^5 g_n &= -[\cos(\gamma_2) + \sin(\gamma_2)] \sin(\alpha_3) + [-\sin(\gamma_2) + \cos(\gamma_2)] \cos(\alpha_3) = \\
 &= -\cos(\gamma_2) \sin(\alpha_3) - \sin(\gamma_2) \sin(\alpha_3) - \sin(\gamma_2) \cos(\alpha_3) + \cos(\gamma_2) \cos(\alpha_3) = \quad (3.95) \\
 &= \cos(\gamma_2 + \alpha_3) - \sin(\gamma_2 + \alpha_3) = \\
 &= \cos(\gamma_3) - \sin(\gamma_3) \quad .
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że suma współczynników filtru górnoprzepustowego dla struktury trójwarstwowej wyraża się takim samym wzorem, jak dla struktury jednowarstwowej. Oznacza to, że dla struktury o trzech warstwach wzór (2.64) jest spełniony dla kąta $\gamma_3 = \gamma_1 = \frac{\pi}{4}$.

Ponieważ dla struktury trójwarstwowej suma współczynników obu filtrów wyraża się identycznymi wzorami jak dla struktury jednowarstwowej, to dokładanie do struktury kratowej kolejnych warstw będzie dawało wyniki identyczne z uzyskanymi wcześniej dla struktury jedno i dwuwarstwowej. Tym samym zostało dowiedzione, że filtry dolno i górnoprzepustowy, realizowane przez strukturę kratową o asymetrycznych operacjach bazowych, spełniają warunki (2.62) i (2.64), przy czym wymaga to spełnienia dodatkowego założenia w postaci wzoru (3.86).

Prawdziwość zależności (3.87) – w przypadku struktury o nieparzystej liczbie warstw – oraz zależności (3.39) – w przypadku parzystej liczby warstw – zosta-

nie dowiedziona przy użyciu zasady indukcji matematycznej. Wykazana zostanie prawdziwość następujących tez:

1. filtry $\mathbf{h}^{(2)}$ i $\mathbf{g}^{(2)}$, utworzone wg. wzoru (3.30) przy użyciu podstawień (3.85), spełniają zależność (3.87),
2. z faktu, że filtry $\mathbf{h}^{(L)}$ i $\mathbf{g}^{(L)}$ spełniają zależność (3.87) wynika, że filtry $\mathbf{h}^{(L+2)}$ i $\mathbf{g}^{(L+2)}$ spełniają zależność (3.39).
3. z faktu, że filtry $\mathbf{h}^{(L)}$ i $\mathbf{g}^{(L)}$ spełniają zależność (3.39) wynika, że filtry $\mathbf{h}^{(L+2)}$ i $\mathbf{g}^{(L+2)}$ spełniają zależność (3.87).

Udowodnijmy prawdziwość pierwszej tezy. Z podanych wcześniej równań (3.88) i (3.89) widać, że współczynniki filtru $\mathbf{g}^{(2)}$ powstają poprzez odwrócenie kolejności współczynników w filtrze $\mathbf{h}^{(2)}$ i zmianę znaku pierwszego z tych współczynników:

$$\begin{aligned} g_0 &= (-1)^1 h_{2-0-1} = -h_1 = -\sin(\alpha_1) , \\ g_1 &= (-1)^2 h_{2-1-1} = h_0 = \cos(\alpha_1) , \end{aligned} \tag{3.96}$$

co dowodzi prawdziwości pierwszej tezy. Wykażmy teraz prawdziwość drugiej tezy. Załóżmy, że jest ona prawdziwa dla filtru o długości L , a więc pomiędzy współczynnikami h_n i g_n zachodzą zależności zgodnie ze wzorem (3.87):

$$\begin{aligned} g_0 &= -h_{L-1} , \\ g_1 &= h_{L-2} , \\ g_2 &= -h_{L-3} , \\ &\vdots \\ g_{L-3} &= h_2 , \\ g_{L-2} &= -h_1 , \\ g_{L-1} &= h_0 . \end{aligned} \tag{3.97}$$

Wykazane zostanie, że na mocy założenia indukcyjnego (3.97), z wzoru (3.30), przy zastosowaniu podstawień (3.85), uzyskuje się współczynniki spełniające zależność (3.39). Zgodnie z wzorami (3.30) współczynniki filtru $\mathbf{g}^{(L+2)}$ mają wartość⁵:

⁵W poniższych wzorach kąt α_{L+1} jest zapisywany jako α .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}^{(L+2)} &= [-g_0 \sin(\alpha), -g_1 \sin(\alpha), -g_2 \sin(\alpha) + h_0 \cos(\alpha), \\
 &\quad -g_3 \sin(\alpha) + h_1 \cos(\alpha), \dots, -g_{L-2} \sin(\alpha) + h_{L-4} \cos(\alpha), \\
 &\quad -g_{L-1} \sin(\alpha) + h_{L-3} \cos(\alpha), h_{L-2} \cos(\alpha), h_{L-1} \cos(\alpha)] \stackrel{(3.97)}{=} \\
 &= [h_{L-1} \sin(\alpha), -h_{L-2} \sin(\alpha), h_{L-3} \sin(\alpha) + h_0 \cos(\alpha), \\
 &\quad -h_{L-4} \sin(\alpha) + h_1 \cos(\alpha), \dots, h_1 \sin(\alpha) + h_{L-4} \cos(\alpha), \\
 &\quad -h_0 \sin(\alpha) + h_{L-3} \cos(\alpha), h_{L-2} \cos(\alpha), h_{L-1} \cos(\alpha)] .
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

Zgodnie ze wzorem (3.30) i podstawieniem (3.85), współczynniki filtru $\mathbf{h}^{(L+2)}$ przyjmują wartość:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}^{(L+2)} &= [g_0 \cos(\alpha), g_1 \cos(\alpha), g_2 \cos(\alpha) + h_0 \sin(\alpha), \\
 &\quad g_3 \cos(\alpha) + h_1 \sin(\alpha), \dots, g_{L-2} \cos(\alpha) + h_{L-4} \sin(\alpha), \\
 &\quad g_{L-1} \cos(\alpha) + h_{L-3} \sin(\alpha), h_{L-2} \sin(\alpha), h_{L-1} \sin(\alpha)] \stackrel{(3.97)}{=} \\
 &= [-h_{L-1} \cos(\alpha), h_{L-2} \cos(\alpha), -h_{L-3} \cos(\alpha) + h_0 \sin(\alpha), \\
 &\quad h_{L-4} \cos(\alpha) + h_1 \sin(\alpha), \dots, -h_1 \cos(\alpha) + h_{L-4} \sin(\alpha), \\
 &\quad h_0 \cos(\alpha) + h_{L-3} \sin(\alpha), h_{L-2} \sin(\alpha), h_{L-1} \sin(\alpha)] .
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

Odwróćmy kolejność współczynników filtru $\mathbf{h}^{(L+2)}$, wyrażonych wzorem (3.99):

$$\begin{aligned}
 &[h_{L-1} \sin(\alpha), h_{L-2} \sin(\alpha), h_0 \cos(\alpha) + h_{L-3} \sin(\alpha), \\
 &\quad -h_1 \cos(\alpha) + h_{L-4} \sin(\alpha), \dots, h_{L-4} \cos(\alpha) + h_1 \sin(\alpha), \\
 &\quad -h_{L-3} \cos(\alpha) + h_0 \sin(\alpha), h_{L-2} \cos(\alpha), -h_{L-1} \cos(\alpha)] .
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

Zauważmy, że aby współczynniki wyrażone równaniem (3.100) były równe współczynnikom podanym we wzorze (3.98), należy zmienić znak parzystych współczynników⁶ filtru. Dokonując takiej zmiany znaku, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 &[h_{L-1} \sin(\alpha), -h_{L-2} \sin(\alpha), h_0 \cos(\alpha) + h_{L-3} \sin(\alpha), \\
 &\quad h_1 \cos(\alpha) - h_{L-4} \sin(\alpha), \dots, h_{L-4} \cos(\alpha) + h_1 \sin(\alpha), \\
 &\quad h_{L-3} \cos(\alpha) - h_0 \sin(\alpha), h_{L-2} \cos(\alpha), h_{L-1} \cos(\alpha)] .
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

⁶Patrz: przypis 2 na stronie 79.

Widać, że współczynniki wyrażone wzorami (3.98) i (3.101) są identyczne. Założenie, że filtry $\mathbf{h}^{(L)}$ i $\mathbf{g}^{(L)}$ spełniają zależność (3.87) doprowadziło do wniosku, że filtry $\mathbf{h}^{(L+2)}$ i $\mathbf{g}^{(L+2)}$ spełniają zależność (3.39). Tym samym wykazano prawdziwość drugiej tezy.

Wykażmy prawdziwość trzeciej tezy. Załóżmy, że jest ona prawdziwa dla filtru o długości L , a więc pomiędzy współczynnikami h_n i g_n zachodzą zależności zgodnie z równaniem (3.39) ze strony 71. Wykazane zostanie, że na mocy założenia indukcyjnego (3.64), z wzoru (3.30), przy zastosowaniu podstawień (3.85), uzyskuje się współczynniki spełniające zależność (3.87). Zgodnie z wzorami (3.30) współczynniki filtru $\mathbf{g}^{(L+2)}$ mają wartość:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(L+2)} &= [-g_0 \sin(\alpha), -g_1 \sin(\alpha), -g_2 \sin(\alpha) + h_0 \cos(\alpha), \\ &\quad -g_3 \sin(\alpha) + h_1 \cos(\alpha), \dots, -g_{L-2} \sin(\alpha) + h_{L-4} \cos(\alpha), \\ &\quad -g_{L-1} \sin(\alpha) + h_{L-3} \cos(\alpha), h_{L-2} \cos(\alpha), h_{L-1} \cos(\alpha)] \stackrel{(3.64)}{=} \\ &= [-h_{L-1} \sin(\alpha), h_{L-2} \sin(\alpha), -h_{L-3} \sin(\alpha) + h_0 \cos(\alpha), \\ &\quad h_{L-4} \sin(\alpha) + h_1 \cos(\alpha), \dots, -h_1 \sin(\alpha) + h_{L-4} \cos(\alpha), \\ &\quad h_0 \sin(\alpha) + h_{L-3} \cos(\alpha), h_{L-2} \cos(\alpha), h_{L-1} \cos(\alpha)] . \end{aligned} \quad (3.102)$$

Zgodnie ze wzorem (3.30) i podstawieniem (3.85), współczynniki filtru $\mathbf{h}^{(L+2)}$ przyjmują wartość:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(L+2)} &= [g_0 \cos(\alpha), g_1 \cos(\alpha), g_2 \cos(\alpha) + h_0 \sin(\alpha), \\ &\quad g_3 \cos(\alpha) + h_1 \sin(\alpha), \dots, g_{L-2} \cos(\alpha) + h_{L-4} \sin(\alpha), \\ &\quad g_{L-1} \cos(\alpha) + h_{L-3} \sin(\alpha), h_{L-2} \sin(\alpha), h_{L-1} \sin(\alpha)] \stackrel{(3.64)}{=} \\ &= [h_{L-1} \cos(\alpha), -h_{L-2} \cos(\alpha), h_{L-3} \cos(\alpha) + h_0 \sin(\alpha), \\ &\quad -h_{L-4} \cos(\alpha) + h_1 \sin(\alpha), \dots, h_1 \cos(\alpha) + h_{L-4} \sin(\alpha), \\ &\quad -h_0 \cos(\alpha) + h_{L-3} \sin(\alpha), h_{L-2} \sin(\alpha), h_{L-1} \sin(\alpha)] . \end{aligned} \quad (3.103)$$

Odwróćmy kolejność współczynników filtru $\mathbf{h}^{(L+2)}$, wyrażonych wzorem (3.103):

$$\begin{aligned} &[h_{L-1} \sin(\alpha), h_{L-2} \sin(\alpha), -h_0 \cos(\alpha) + h_{L-3} \sin(\alpha), \\ &h_1 \cos(\alpha) + h_{L-4} \sin(\alpha), \dots, -h_{L-4} \cos(\alpha) + h_1 \sin(\alpha), \\ &h_{L-3} \cos(\alpha) + h_0 \sin(\alpha), -h_{L-2} \cos(\alpha), h_{L-1} \cos(\alpha)] . \end{aligned} \quad (3.104)$$

Zauważmy, że aby współczynniki wyrażone równaniem (3.104) były równe współczynnikom podanym we wzorze (3.102), należy zmienić znak nieparzystych współczynników⁷ filtru. Dokonując takiej zmiany znaku, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & [-h_{L-1} \sin(\alpha), h_{L-2} \sin(\alpha), h_0 \cos(\alpha) - h_{L-3} \sin(\alpha), \\ & h_1 \cos(\alpha) + h_{L-4} \sin(\alpha), \dots, h_{L-4} \cos(\alpha) - h_1 \sin(\alpha), \\ & h_{L-3} \cos(\alpha) + h_0 \sin(\alpha), h_{L-2} \cos(\alpha), h_{L-1} \cos(\alpha)] . \end{aligned} \quad (3.105)$$

Widać, że współczynniki wyrażone wzorami (3.102) i (3.105) są identyczne. Pokazano, że jeśli wykorzysta się filtry $\mathbf{h}^{(L)}$ i $\mathbf{g}^{(L)}$ spełniające zależność (3.39), do utworzenia pary filtrów $\mathbf{h}^{(L+2)}$ i $\mathbf{g}^{(L+2)}$ zgodnie ze wzorem (3.30), to współczynniki nowych filtrów będą spełniały zależność (3.87). Tym samym wykazano prawdziwość trzeciej tezy. Wcześniej wykazano, że jeśli wykorzysta się parę filtrów $\mathbf{h}^{(L)}$ i $\mathbf{g}^{(L)}$ spełniających zależność (3.87), do utworzenia pary filtrów $\mathbf{h}^{(L+2)}$ i $\mathbf{g}^{(L+2)}$ zgodnie ze wzorem (3.30), to współczynniki nowych filtrów będą spełniały zależność (3.39). W połączeniu z wykazaną wcześniej tezą, że filtry $\mathbf{h}^{(2)}$ i $\mathbf{g}^{(2)}$, realizowane przez jednowarstwową strukturę kratową o asymetrycznych ortogonalnych operacjach bazowych, spełniają zależność (3.87), prowadzi to do ostatecznego wniosku, że współczynniki filtrów $\mathbf{h}^{(L)}$ i $\mathbf{g}^{(L)}$ spełniają zależność (3.87) jeśli $\frac{L}{2}$ jest liczbą nieparzystą albo spełniają zależność (3.39) jeśli $\frac{L}{2}$ jest liczbą parzystą.

Przejdźmy do dowodu ortogonalności filtru $\mathbf{h}$ względem swoich przesunięć o 2 (równanie (2.61)), filtru $\mathbf{h}$ względem filtru $\mathbf{g}$ i jego przesunięć o 2 (równanie (2.66)) oraz filtru $\mathbf{g}$ względem swoich przesunięć o 2 (równanie (3.40)). Rozpocznijmy od dowodu równania (2.66). Dla struktury o parzystej liczbie warstw, a więc takiej w której współczynniki filtrów $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$ spełniają zależność (3.39), dowód przebiega identycznie jak dla struktury o symetrycznych ortogonalnych operacjach bazowych (patrz strony 79–81). Dla struktury o nieparzystej liczbie warstw rozpisujemy równanie (2.66):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{L-1} h_n g_{n+2m} & \stackrel{(3.87)}{=} \sum_{n=0}^{L-1} h_n (-1)^{n+2m+1} h_{L-(n+2m)-1} = \\ & \sum_{n=1,3,\dots}^{L-1} h_n h_{L-n-2m-1} - \sum_{n=0,2,\dots}^{L-2} h_n h_{L-n-2m-1} . \end{aligned} \quad (3.106)$$

⁷Patrz: przypis 2 na stronie 79.

Powyższe równanie ma dawać w wyniku 0, co będzie miało miejsce, jeśli obie sumy będą sobie równe (warunek wystarczający). Tym samym dochodzimy do równania identycznego z równaniem (3.70) na stronie 80 i dalszy dowód równania (2.66) dla struktury o asymetrycznych ortogonalnych operacjach bazowych i nieparzystej liczbie warstw przebiega analogicznie jak dla struktury o symetrycznych ortogonalnych operacjach bazowych.

Dowody równań (2.60), (2.61), (3.40) i (3.41) dla struktury o asymetrycznych ortogonalnych operacjach bazowych są identyczne z dowodami dla struktury o symetrycznych operacjach bazowych.

□

3.5 Reprezentacja struktury kratowej gwarantująca spełnienie warunków na bank filtrów ortogonalnych

Jak zostało wykazane w podrozdziałach 3.4.1 i 3.4.2, aby bank filtrów ortogonalnych realizowanych przez strukturę kratową spełniał warunki zdefiniowane w podrozdziale 2.5.2, spełnione muszą być warunki dotyczące sumy kątów we wszystkich warstwach struktury kratowej (przy założeniu, że operacje bazowe są postaci danej równaniem (3.13) albo (3.14)). Dla struktury ortogonalnej o symetrycznych operacjach bazowych, warunek ten dany jest równaniem (3.38) ze strony 71:

$$\sum_{l=1}^{L/2} \alpha_l = \frac{\pi}{4} + \left[\left(\frac{L}{2} - 1 \right) \bmod 4 \right] \cdot \frac{\pi}{2} + 2n\pi ,$$

gdzie $n \in \mathbb{Z}$, podczas gdy dla struktury ortogonalnej o asymetrycznych operacjach bazowych, warunek dany jest równaniem (3.86) ze strony 86:

$$\sum_{l=1}^{L/2} (-1)^{l+1} \alpha_l = (-1)^{(L/2+1)} \cdot \frac{\pi}{4} .$$

Oznaczmy przez ϑ wymaganą sumę kątów, określoną równaniem (3.38) (dla struktury o symetrycznych operacjach bazowych) bądź (3.86) (dla struktury o asymetrycznych operacjach bazowych). W miejsce reprezentacji struktury kratowej za pomocą kątów α_i , gdzie $i = 1, \dots, \frac{L}{2}$, wprowadzona zostaje reprezentacja za pomo-

cą kątów φ_i , gdzie $i = 1, \dots, \frac{L}{2} - 1$. Niech zależności między kątami α_i i φ_i będą zdefiniowane następująco [93]:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \vartheta - \varphi_1 \ , \\ \alpha_i &= (-1)^i(\varphi_{i-1} + \varphi_i) \ , \text{ dla } i = 2, \dots, \frac{L}{2} - 1 \ , \\ \alpha_{\frac{L}{2}} &= \varphi_{\frac{L}{2}-1} \ .\end{aligned}\tag{3.107}$$

Dzięki temu podstawieniu ortogonalna struktura kratowa reprezentowana jest przy użyciu $\frac{L}{2} - 1$ parametrów, zamiast $\frac{L}{2}$ parametrów i jednocześnie zagwarantowane jest spełnienie warunku na wymaganą sumę kątów:

$$\sum_{i=1}^{L/2} \alpha_i = \vartheta - \varphi_1 + \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_2 + \dots - \varphi_{\frac{L}{2}-1} + \varphi_{\frac{L}{2}-1} = \vartheta \ .\tag{3.108}$$

Zauważmy, że podane w podrozdziale 2.5.2 warunki na filtry unieruchamiają $\frac{L}{2} + 1$ stopni swobody, podczas gdy struktura kratowa umożliwia unieruchomienie tylko $\frac{L}{2}$ stopni swobody (każda warstwa struktury kratowej to jeden dostępny stopień). Narzucenie warunku na sumę kątów unieruchamia jeszcze jeden stopień, gwarantując spełnienie warunków wymaganych do uzyskiwania ortogonalnych filtrów falkowych. Rezygnacja z warunków na sumę kątów doprowadziłaby do syntezy kwadraturowych filtrów lustrzanych.

Przeanalizujmy wpływ wprowadzenia parametryzacji (3.107) na klasę falek możliwych do zsyntezowania za pomocą struktury kratowej. Niech dane będą kąty α_i , gdzie $i = 1, \dots, \frac{L}{2}$, reprezentujące strukturę kratową. Załóżmy, że jeden z tych kątów zostanie zwiększony o π :

$$\alpha'_i = \alpha_i + \pi \ .\tag{3.109}$$

Z własności funkcji trygonometrycznych wiadomo, że:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha'_i) &= \sin(\alpha_i + \pi) = -\sin(\alpha_i) \ , \\ \cos(\alpha'_i) &= \cos(\alpha_i + \pi) = -\cos(\alpha_i) \ .\end{aligned}\tag{3.110}$$

A zatem zwiększenie dowolnego kąta α_i o π powoduje zmianę znaku wszystkich wag w operacji bazowej odpowiadającej temu kątowi⁸:

⁸Identyczny wynik uzyskuje się przy zastosowaniu podstawienia $\alpha'_i = \alpha_i - \pi$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \cos(\alpha'_i) & \sin(\alpha'_i) \\ \sin(\alpha'_i) & -\cos(\alpha'_i) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ -\sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{bmatrix} = \\
&= -1 \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & -\cos(\alpha_i) \end{bmatrix} .
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Analizując wzór (3.30) widać, że zmiana znaku obu wag jednej operacji bazowej powoduje zmianę znaku wszystkich współczynników obu filtrów realizowanych przez daną strukturę kratową, co w rezultacie prowadzi do zmiany znaku współczynników rozwinięcia falkowego uzyskiwanego przy użyciu takich filtrów. Z punktu widzenia zastosowań praktycznych nie jest to istotne, ponieważ w zagadnieniach przetwarzania sygnałów znaczenie mają wartości bezwzględne współczynników rozwinięcia falkowego, a nie ich znak.

Przeanalizujmy teraz analogiczną sytuację dla kątów φ_i , gdzie $i = 1, \dots, \frac{L}{2} - 1$. Załóżmy, że jeden z tych kątów zostanie zwiększony o π :

$$\varphi'_i = \varphi_i + \pi . \tag{3.112}$$

Rozważmy wpływ powyższego podstawienia na wartości kątów α_i . Zgodnie z podstawieniem (3.107), każdy kąt φ_i wpływa na wartość dwóch kątów α_i w sąsiednich warstwach, a zatem zastosowanie podstawienia (3.112) powoduje zmianę znaków wszystkich wag w dwóch operacjach bazowych. Zgodnie z tym co zostało wcześniej powiedziane, zmiana znaku wag jednej operacji bazowej powoduje zmianę znaku wszystkich współczynników filtrów realizowanych przez strukturę kratową, a zatem zmiana znaku współczynników dwóch operacji bazowych sprawia, że ostatecznie współczynniki filtrów mają taki sam znak jak pierwotnie. Tak więc podstawienie (3.112) nie wpływa ani na wartości ani na znak współczynników filtra. Z tego spostrzeżenia płyną dwa istotne wnioski. Po pierwsze, skoro dla kąta φ_i współczynniki filtrów realizowanych przez strukturę kratową są identyczne jak dla kąta $\varphi_i + \pi$, to zakres kątów φ_i można ograniczyć do przedziału $[0, \pi)$. Po drugie, jak pokazano wcześniej, w przypadku reprezentacji struktury kratowej w postaci kątów $\alpha_i \in [0, 2\pi)$, możliwa jest realizacja przez strukturę filtrów o identycznych współczynnikach, ale przeciwnych znakach. Poprzez wprowadzenie reprezentacji struktury kratowej za pomocą kątów $\varphi_i \in [0, \pi)$, wyeliminowana została możliwość realizacji klasy filtrów o znakach przeciwnych. Tak więc podstawienie (3.107)

prowadzi do automatycznego spełnienia warunków (3.38) i (3.86), a jednocześnie nie ogranicza w zastosowaniach praktycznych klasy filtrów możliwych do zsyntezowania przy użyciu struktury kratowej.

3.6 Podsumowanie i wnioski

W powyższym rozdziale wprowadzona została idea struktury kratowej jako metody realizacji dyskretnego przekształcenia falkowego. Zaprezentowano jej schemat obliczeniowy, wprowadzono pojęcie operacji bazowej oraz ortogonalnych operacji bazowych. Omówiono permutację sygnału wyjściowego powstającą podczas realizacji przekształcenia falkowego przy użyciu struktury kratowej. Zaprojektowano algorytm konwersji parametrów operacji bazowych struktury kratowej na współczynniki filtrów realizowanych przez tą strukturę. Korzystając ze stworzonego algorytmu przeprowadzono autorski dowód pokazujący, że zaproponowana przez Jacymirskiego struktura kratowa, oparta o ortogonalne operacje bazowe, realizuje filtry falkowe spełniające warunki banku filtrów ortogonalnych, sformułowane w rozdziale 2.5.2, przy założeniu dodatkowych warunków dotyczących sumy kątów we wszystkich warstwach struktury kratowej. Wprowadzono również alternatywną reprezentację struktury kratowej, gwarantującą spełnienie tych dodatkowych warunków. Przeprowadzony dowód pokazuje, że w praktycznej realizacji przekształceń falkowych należy zrezygnować z ogólniejszej postaci struktury kratowej i ograniczyć się do jej wersji ortogonalnej.

Struktura kratowa daje możliwość adaptacji współczynników realizowanych filtrów poprzez zmianę parametrów (kątów) w operacjach bazowych. Tym samym możliwe staje się projektowanie filtrów cyfrowych poprzez optymalizację numeryczną parametrów struktury kratowej. Aby było to możliwe należy zaprojektować funkcję celu, pozwalającą ocenić optymalność danego banku filtrów ortogonalnych realizowanego przez strukturę kratową, a następnie dokonać optymalizacji tej funkcji w celu wyznaczenia optymalnych parametrów struktury kratowej. Zagadnieniu temu poświęcony będzie Rozdział 4.

Rozdział 4

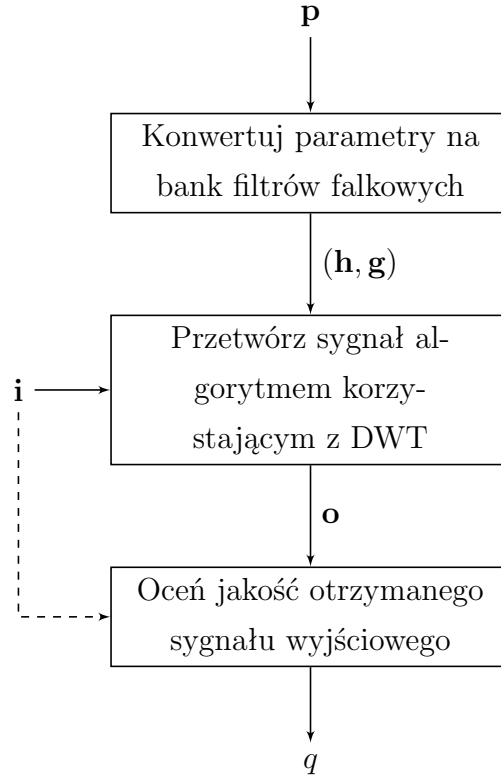
Synteza falek na podstawie oceny przetworzonego sygnału

W ramach niniejszego rozdziału szczegółowo zaprezentowana zostanie proponowana przez autora metoda syntezy falek na podstawie oceny przetworzonego sygnału. Podrozdział 4.1 przedstawia proponowany algorytm syntezy falek w postaci ogólnej. Aby możliwe było zastosowanie algorytmu w konkretnym zastosowaniu należy szczegółowo określić trzy elementy tworzące algorytm ogólny: metodę parametryzacji falek (w tym algorytm konwersji parametrów na współczynniki filtrów falkowych), algorytm przetwarzania sygnału dla którego ma zostać zsyntezowana falka oraz metodę oceny przetworzonego sygnału, czyli kryterium oceny skuteczności filtrów falkowych. Pierwszy z tych trzech elementów – parametryzacja filtrów falkowych – został szczegółowo omówiony w Rozdziale 3. Jako drugi z elementów – przykładowy algorytm przetwarzania sygnału – wybrano algorytm osadzania cyfrowego znaku wodnego w dziedzinie DWT. Algorytm ten został opisany w podrozdziale 2.8.3. Podrozdział 4.2 prezentuje szczegółowo opis trzeciego elementu proponowanego algorytmu ogólnego: kryteria oceny przetworzonego sygnału. Opisuje także modyfikację algorytmu osadzania znaku wodnego, przekształcającą problem optymalizacji wielokryterialnej w optymalizację jednokryterialną. W podrozdziale 4.3 zaprezentowano algorytm ewolucyjny użyty do przeszukiwania przestrzeni rozwiązań w celu wyznaczenia rozwiązania najlepszego. Opisano metodę reprezentacji struktury kratowej w algorytmie ewolucyjnym oraz podano szczegółowe wzory do obliczania przystosowania osobników, będące tożsame z wzorami na obliczanie wartości optymalizowanej funkcji celu. Na zakończenie rozdziału, w podrozdziale 4.4, przedyskutowano ograniczenia proponowanej metody.

4.1 Ogólna idea syntezy falek na podstawie oceny przetworzonego sygnału

U podstaw idei syntezy falek na podstawie oceny przetworzonego sygnału leży skonstruowanie odpowiedniej funkcji celu, której wartość zależy bezpośrednio od wartości parametrów filtrów falkowych. Wyliczanie wartości funkcji celu jest dwuetapowe. Pierwszy etap to przetworzenie wybranego sygnału wejściowego – traktowanego jako parametr – za pomocą algorytmu opartego o DWT. Drugi etap to ocena przetworzonego sygnału, prowadząca do otrzymania jednej wartości liczbowej, będącej wartością funkcji celu. Ogólny schemat algorytmu konstrukcji funkcji celu przedstawia Rysunek 4.1. Opiszmy szczegółowo trzy podstawowe kroki składające się na zaproponowany algorytm:

1. **Parametryzacja filtrów.** W ramach niniejszej rozprawy zastosowano parametryzację falek ortogonalnych opartą o strukturę kratową. Możliwe jest jednak zastosowanie dowolnej innej parametryzacji falek ortogonalnych bądź biortogonalnych, gwarantującej spełnienie warunków nałożonych na bank filtrów falkowych. Oznaczmy wektor parametrów filtrów, będących zmiennymi optymalizowanymi, jako $\mathbf{p}$. Przestrzeń parametrów $\mathbf{p}$ filtrów falkowych wyznacza przestrzeń poszukiwań.
2. **Wybór algorytmu przetwarzania sygnału.** Nowością wprowadzaną przez proponowaną metodę syntezy falek jest możliwość ich optymalizacji pod kątem dowolnego algorytmu przetwarzania sygnału. Algorytm przyjmuje na wejściu wektor danych $\mathbf{i}$, pełniący rolę parametru w algorytmie syntezy falek, oraz filtry falkowe $(\mathbf{h}, \mathbf{g})$. Algorytm zwraca sygnał przetworzony $\mathbf{o}$.
3. **Ocena przetworzonego sygnału.** Ocenie podlega sygnał przetworzony $\mathbf{o}$ otrzymywany jako wyjście wybranego algorytmu, co sprawia że w procesie syntezy w pełni uwzględniania jest specyfika całego algorytmu przetwarzania sygnału. Przypomnijmy, że dotychczas zaproponowane metody syntezy falek w najlepszym przypadku uwzględniały jedynie częściową specyfikę algorytmu – synteżując falki do algorytmów kompresji uwzględniano jedynie koncentrację energii, pomijając przy tym wpływ kwantyzacji i kodowania na ostateczny wynik. W wyniku oceny otrzymywana jest wartość skalarna q , sta-



Rysunek 4.1: Ogólny schemat konstrukcji funkcji celu do syntezy filtrów falkowych. $\mathbf{p}$ – parametry filtru; $\mathbf{i}$ – dane wejściowe algorytmu przetwarzającego sygnał; $\mathbf{o}$ – dane wyjściowe algorytmu przetwarzającego sygnał; q – wartość funkcji celu; linia przerywana – połączenie opcjonalne.

nowiąca wartość optymalizowanej funkcji celu dla zmiennych $\mathbf{p}$ i parametrów $\mathbf{i}$, co można zapisać jako:

$$q = f(\mathbf{p}, \mathbf{i}) . \quad (4.1)$$

Zależność wartości funkcji celu $f(\cdot)$ od wektora danych wejściowych $\mathbf{i}$ stanowi odzwierciedlenie drugiej tezy niniejszej rozprawy doktorskiej: syntezywana falka adaptuje się do przetwarzanego sygnału wejściowego, ponieważ wartość zdefiniowanej funkcji celu jest od tego sygnału wejściowego uzależniona.

Otrzymana funkcja celu, dana równaniem (4.1), musi zostać zoptymalizowana. Wybór algorytmu optymalizacji musi uwzględniać specyfikę problemu oraz charakterystykę optymalizowanej funkcji celu. Większość stosowanych obecnie algorytmów przetwarzania sygnału ma charakter nieciągły, co uniemożliwia stosowanie

gradientowych metod optymalizacji. Można się również spodziewać, że funkcja celu będzie funkcją multimodalną, co zawęży znacznie zakres możliwych do użycia algorytmów optymalizacji. W ramach niniejszej rozprawy użyty zostanie algorytm ewolucyjny jako metoda globalnego przeszukiwania funkcji celu. Jego szczegółowy opis zamieszczono w podrozdziale 4.3.2.

4.2 Synteza przekształceń falkowych do poprawy jakości cyfrowych znaków wodnych

W ramach niniejszej rozprawy jako algorytm przetwarzania sygnału użyty zostanie algorytm osadzania cyfrowych znaków wodnych, opisany w podrozdziale 2.8.3. W algorytmie tym na wektor danych wejściowych $\mathbf{i}$ składają się oznaczany obraz X oraz osadzany znak wodny $\mathbf{w}$. Ponadto należy określić siłę osadzenia znaku κ albo dopuszczalne zniekształcenie oznaczonego obrazu. Zagadnienie to zostanie omówione szczegółowo po przedstawieniu kryteriów oceny przetworzonego sygnału. Na wektor wyjściowy $\mathbf{o}$ algorytmu osadzania znaku wodnego składa się obraz Y z osadzonym znakiem wodnym (ten sygnał będzie podlegał ocenie) oraz informacja które współczynniki falkowe zostały oznaczone (wymagane do ekstrakcji znaku w zastosowanym algorytmie osadzania).

W zadaniu osadzania cyfrowych znaków wodnych istnieje kilka kryteriów oceny otrzymanego sygnału wyjściowego Y . Te kryteria to:

- **Jakość obrazu** : proces osadzania znaku wodnego wprowadza do obrazu pewne zniekształcenia. Nie można jednak dopuścić do sytuacji, w której w wyniku osadzenia znaku wodnego dochodzi do degradacji oznaczanego obrazu, tak że jego dalsze wykorzystywanie staje się niemożliwe. Konieczne jest więc zagwarantowanie, że oznaczony obraz zachowa dobrą jakość. Zagadnieniu oceny jakości obrazu poświęcono podrozdział 4.2.1.
- **Separowalność** : wyekstrahowany znak wodny musi mieć o wiele większą znormalizowaną korelację z osadzonym znakiem wodnym, niż z innymi, losowymi znakami wodnymi. Dzięki temu zagwarantowana będzie możliwość bezbłędnego rozpoznania osadzonego znaku wodnego. Należy więc zmaksymalizować separowalność.

- **Odporność na ataki** : osadzony znak wodny musi być możliwy do wykrycia, pomimo poddania obrazu operacjom przetwarzania sygnału. Jak zostało już wcześniej napisane, w ramach niniejszej rozprawy rozważane będą tylko tzw. ataki usuwające (ang. *removal attacks*), czyli ataki polegające na szeroko rozumianej filtracji bądź zaszumieniu oznaczonego obrazu, bez ingerowania w jego strukturę geometryczną. Do tych ataków zalicza się np. kompresja, filtracja medianowa i dolnoprzepustowa czy wyrównanie histogramu. Odporność na ataki jest bezpośrednio związana z separowalnością, co zostanie szczegółowo omówione w podrozdziale 4.3.3.

Jakość oznaczonego obrazu i separowalność (korelacja) to dwa sprzeczne ze sobą kryteria regulowane za pomocą siły osadzenia κ . Niska wartość siły osadzenia κ zapewnia wysoką jakość oznaczonego obrazu ale prowadzi do niskiej separowalności. Zwiększenie siły osadzenia prowadzi do wzrostu separowalności, ale pogarsza jakość obrazu (pokazują to Rysunki 5.2 i 5.3 ze stron 120–121). Przyjęcie stałej siły osadzenia i próba optymalizacji filtrów falkowych pod kątem jednoczesnej poprawy jakości obrazu i separowalności prowadzi do problemu optymalizacji wielokryterialnej, który w ogólnym przypadku nie jest zagadnieniem łatwym do rozwiązania [137]. Zagadnienie jednoczesnej poprawy jakości obrazu i separowalności pojawiło się w kilku przytoczonych wcześniej artykułach [4, 44, 53, 54, 99], przy czym jedynym artykułem, którego autorzy zdecydowali się na przeprowadzenie optymalizacji wielokryterialnej z użyciem algorytmu NSGA-II jest [4]. W pozostałych przypadkach autorzy sprowadzali problem optymalizacji wielokryterialnej do zagadnienia optymalizacji jednokryterialnej poprzez ważenie przystosowań cząstkowych. W ramach niniejszej pracy zastosowane zostanie inne podejście. Arbitralnie przyjęty zostanie pewien akceptowalny poziom zniekształcenia obrazu. Następnie siła osadzenia κ zostanie dobrana z użyciem funkcji optymalizacyjnej `fmincon` dostępnej w środowisku Matlab, tak aby w wyniku osadzenia znaku osiągnąć dokładnie oczekiwaną wartość zniekształcenia. Takie osadzanie znaku wodnego nazywać będziemy *osadzaniem znaku wodnego ze stałym zniekształceniem oznaczonego obrazu* albo krótko *osadzaniem ze stałym zniekształceniem*. Mając obraz o oczekiwanym zniekształceniu, dokonywana będzie tylko ocena separowalności (odporności na ataki). Zagadnieniu temu poświęcono podrozdział 4.3.3.

4.2.1 Ocena jakości obrazu

Istotnym elementem w proponowanym algorytmie jest metoda oceny jakości zniekształconego obrazu. Aktualnie nie istnieją dedykowane miary jakości obrazu zaprojektowane z myślą o ocenie obrazów z osadzonym znakiem wodnym. Zmusza to autora do wykorzystania istniejących w literaturze miar ogólnych podobieństwa dwóch obrazów. Powszechnie stosowaną metodą oceny zniekształcenia obrazu w stosunku do oryginału jest błąd średniokwadratowy (ang. *mean squared error*, MSE):

$$MSE = \frac{1}{NM} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} [X_{(i,j)} - Y_{(i,j)}]^2, \quad (4.2)$$

bądź bezpośrednio zależny od niego szczytowy stosunek sygnału do szumu (ang. *Peak Signal-to-Noise Ratio*, PSNR):

$$PSNR = 10 \cdot \log_{10} \frac{J^2}{MSE}, \quad (4.3)$$

gdzie X i Y to porównywane sygnały dwuwymiarowe (obrazy), N oraz M to ich wymiary, a J to maksymalna wartość możliwa dla próbek sygnałów X i Y ¹. PSNR jest najpowszechniej używaną miarą zniekształcenia obrazów z dwóch powodów: a) łatwo go zaimplementować oraz b) wszyscy inni go używają. Oczywiście te dwa “argumenty” nie mogą być uznane za powód do wykorzystywania PSNR w badaniach naukowych, tym bardziej że w praktyce PSNR nie jest miarodajnym wskaźnikiem jakości obrazu, ponieważ w żaden sposób nie uwzględnia charakterystyki porównywanych obrazów oraz sposobu postrzegania ich przez ludzkie oko (HVS). Błądność jego wskazań zademonstrowali Wang i Bovik w swojej książce poświęconej nowoczesnym miarom oceny jakości obrazu [129]. Ci sami autorzy zaproponowali miarę jakości, którą nazwali indeksem podobieństwa strukturalnego (ang. *Structural Similarity Index*, SSIM) [128]. Była ona stosowana przez niektórych autorów zajmujących się zagadnieniem cyfrowych znaków wodnych, np. [51, 115]. Miara SSIM rozdziela zniekształcenia wprowadzone w obrazie na trzy składowe: zmianę jasności, zmianę kontrastu i zmianę w strukturach obiektów. SSIM obliczany jest poprzez zastosowanie algorytmu ruchomego okna, tworząc mapę zniekształceń obrazu. Dla każdego okna m zniekształcenie wyliczane jest jako:

¹W przypadku obrazów w skali szarości $J = 255$.

$$Q_m = \frac{(2\overline{XY} + C_1)(2\sigma_{XY} + C_2)}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + C_1)(\overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + C_2)} , \quad (4.4)$$

gdzie X i Y to porównywane okna należące odpowiednio do obrazu oryginalnego i zniekształconego, $\overline{X}$ i $\overline{Y}$ to średnia jasność pikseli w oknie, σ_X^2 i σ_Y^2 to odchylenie standardowe jasności pikseli w oknie, σ_{XY} określone jest wzorem:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{NM - 1} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} (X_{(i,j)} - \overline{X})(Y_{(i,j)} - \overline{Y}) , \quad (4.5)$$

a C_1 i C_2 to pewne stałe mające ustabilizować wyniki w przypadku gdy mianownik jest bliski zeru. Przyjmując $C_1 = C_2 = 0$ otrzymuje się indeks Wanga-Bovika (ang. *Wang-Bovik Index*, WBI):

$$Q_m = \frac{4\sigma_{XY}\overline{XY}}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)(\overline{X}^2 + \overline{Y}^2)} . \quad (4.6)$$

W wyniku zastosowania wskaźnika WBI opartego o algorytm ruchomego okna otrzymuje się mapę zniekształceń pomiędzy dwoma porównywanymi obrazami. Aby możliwy był jednak dobór siły osadzenia κ , gwarantujący ustalony poziom zniekształcenia obrazu, konieczne jest zastosowanie miary jakości obliczającej pojedynczą liczbę określającą stopień podobieństwa dwóch obrazów. Eksperymenty przeprowadzone przez autora, mające na celu zaprojektowanie algorytmu przekształcania mapy zniekształceń na pojedynczą liczbę, wykazały że wynik najbardziej korelujący z subiektywnymi ocenami zniekształcenia postrzeganego przez ludzi jest osiągany w przypadku rezygnacji z algorytmu ruchomego okna i wyliczania wskaźnika WBI dla całych obrazów². Takie podejście zostanie zastosowane w przeprowadzonych eksperymentach.

4.3 Synteza falek ortogonalnych przy użyciu algorytmu ewolucyjnego

W podrozdziale 4.2 zaproponowane zostały kryteria optymalizacji funkcji bazowych dyskretnego przekształcenia falkowego w celu poprawy skuteczności osadzania cyfrowych znaków wodnych. Tak określone kryteria umożliwią syntezę nowych

²Jest to równoważne przyjęciu założenia, że rozmiar okna równy jest rozmiarowi obrazu.

filtrów poprzez dostosowanie parametrów struktury kratowej. W tym celu użyte zostaną algorytmy ewolucyjne, jako metoda globalnego przeszukiwania funkcji celu. Wybór ten podyktowany jest doświadczeniem zdobytym przez autora w trakcie prowadzenia badań nad zastosowaniem sztucznych sieci neuronowych do syntezy przekształceń falkowych [103, 104, 105, 106]. W badaniach tych sieć była wykorzystywana jako metoda optymalizacji gradientowej, uczenie sieci odbywało się przy użyciu metody grafów przepływowych (ang. *Signal Flow Graphs*, SFG) [85, 86, 87, 88], a zadanie optymalizacyjne polegało na syntezie falek zapewniających jak najlepszą aproksymację zadanego sygnału bądź klasy sygnałów³. Prowadzone badania pozwoliły autorowi na lepsze poznanie specyfiki problemu syntezy falek jak również dostrzeżenie pewnych ograniczeń związanych z metodami gradientowymi. Okazało się, że w miarę wzrostu złożoności problemu, w szczególności zwiększania długości filtra oraz zwiększania ilości wykonywanych etapów DWT, funkcja celu staje się coraz bardziej multimodalna, a tym samym metody gradientowe stają się bardziej podatne na utknięcie w optimum lokalnym. W przypadku sieci neuronowej nie było również możliwe wymuszenie spełniania warunku na sumę kątów, co powodowało utratę własności dolno i górnoprzepustowości wygenerowanej pary filtrów. Kluczowym argumentem który przeważał na korzyść algorytmów ewolucyjnych jest brak możliwości wyliczenia gradientu w postawionym problemie optymalizacyjnym, ze względu na nieciągły charakter procesów zachodzących w trakcie osadzania znaku i przed jego ekstrakcją (m.in. zaokrąglania do wartości całkowitych wykonywane po transformacie odwrotnej oraz ataki).

Idea algorytmu ewolucyjnego oparta jest na utrzymywaniu wielu potencjalnych rozwiązań – zbiór ten nazywany jest *populacją*. Każde rozwiązanie nazywane jest *osobnikiem*. Osobnik jest reprezentowany jako ciąg bitów⁴, które stanowią jego *genotyp*. Na podstawie istniejącej populacji osobników, w kolejnej iteracji generowana jest nowa populacja, przy czym osobniki gorsze mają mniejszą szansę do niej trafić niż osobniki lepsze. Ocena jakości osobnika odbywa się poprzez przekształcenie jego genotypu na *fenotyp*, czyli rozwiązanie – w niniejszej rozprawie są to współczynniki filtrów $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$ – a następnie obliczenie *przystosowania* tego rozwiąza-

³Zadanie syntezy falek zapewniających jak najdokładniejszą aproksymację sygnału jest tożsame z synteza falek o jak największej koncentracji energii w dolnoprzepustowych współczynnikach falkowego rozwinięcia sygnału.

⁴W literaturze istnieją metody kodowania oparte o liczby rzeczywiste. Nie będą jednak one wykorzystywane w niniejszej rozprawie.

nia. Dzięki selektywnemu wybieraniu osobników do nowej populacji, na podstawie przystosowania ich fenotypu, algorytm ewolucyjny wykazuje zbieżność w kierunku lepszych rozwiązań. Ponadto, w każdej iteracji istniejące rozwiązania są ze sobą *krzyżowane* oraz poddawane *mutacjom*. Operacje te wykonywane są na genotypie osobnika. W ten sposób generowane są nowe, nieznane wcześniej rozwiązania, co zapewnia, że przestrzeń rozwiązań jest przeszukiwana w poszukiwaniu optimum. Ze względu na sposób generowania nowych osobników, możliwe jest opuszczenie optimum lokalnego, dlatego też algorytmy ewolucyjne zaliczane są do metod globalnego przeszukiwania funkcji celu. Generowanie początkowej populacji, wybieranie osobników ze starej do nowej populacji oraz ich krzyżowanie i mutowanie bazują na elemencie losowym. Dlatego też wyniki uzyskiwane za pomocą algorytmu genetycznego nigdy nie są dokładnie powtarzalne. Konstrukcja samego algorytmu zapewnia jednak jego zbieżność.

Podrozdział 4.3.1 prezentuje metodę reprezentacji struktury kratowej w algorytmie ewolucyjnym. Kodowanie osobników oparte jest o podstawienie (3.107) wprowadzone w rozdziale 3.5, dzięki czemu zagwarantowane zostaje spełnienie warunków na sumę kątów, zdefiniowanych w rozdziale 3.4. W podrozdziale 4.3.2 omówiono szczegółowo przebieg algorytmu ewolucyjnego proponowanego do adaptacyjnej syntezy falek. Zaprezentowane są metody selekcji osobników do kolejnej populacji, operatory krzyżowania i mutacji oraz zastosowanie strategii ewolucyjnych. Podrozdział 4.3.3 zawiera opis elementu najważniejszego z punktu widzenia optymalizacji przy użyciu algorytmu ewolucyjnego – obliczania przystosowania osobników.

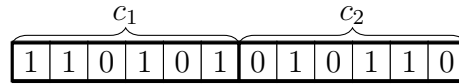
4.3.1 Ewolucyjna implementacja struktury kratowej

Zastosowanie algorytmu ewolucyjnego w zagadnieniu optymalizacji wymaga reprezentacji rozwiązania zadanego problemu w postaci, która może być poddawana działaniu operatorów genetycznych. Ze względu na specyfikę operatorów genetycznych, ta postać to najczęściej ciąg bitów (reprezentacja binarna), który może zostać przekształcony na konkretne rozwiązanie [78]. Poniżej przedstawiona zostanie metoda reprezentacji struktury kratowej w postaci ciągu bitów oraz algorytm konwersji takiego osobnika na parametry struktury kratowej.

Ciąg bitów reprezentujący jedno rozwiązanie nazywany jest osobnikiem. Osobnik reprezentujący rozwiązanie składa się z wielu chromosomów. Każdy chromosom

koduje jedną cechę w postaci ciągu bitów. Bity kodujące chromosom zwane są genami, a położenie każdego genu na chromosomie to tzw. *locus*. W podrozdziale 3.5 wprowadzono reprezentację struktury kratowej za pomocą kątów $\varphi_i \in [0, \pi)$, gdzie $i = 1, \dots, \frac{L}{2} - 1$ (patrz wzór (3.107) na stronie 94). Ta reprezentacja zostanie zastosowana w algorytmie ewolucyjnym. Dzięki niej zagwarantowane będzie spełnienie warunków na sumę kątów (równania (3.38) i (3.86)).

Kąty φ_i muszą zostać zakodowane w postaci binarnej. Niech każdy kąt φ_i będzie reprezentowany w postaci chromosomu c_i , będącego ciągiem m bitów, a więc liczbą całkowitą z przedziału $[0, 2^m)$. Liczbę m nazywać będziemy precyzją. Chromosomy każdego osobnika ułożone są w ciąg. Rysunek 4.2 pokazuje przykładowego osobnika o dwóch chromosomach, a więc kodującego dwa kąty: φ_1 oraz φ_2 (co odpowiada trójwarstwowej strukturze kratowej, czyli filtrowi o długości 6). Każdy z przykładowych chromosomów reprezentowany jest na 6 bitach.



Rysunek 4.2: Binarna reprezentacja osobnika w algorytmie genetycznym.

Konwersja wartości chromosomu c_i na wartość kąta z przedziału $[0, \pi)$ wykonywana jest zgodnie z równaniem:

$$\varphi_i = \frac{c_i \cdot \pi}{2^m} . \quad (4.7)$$

Znając wartości kątów φ_i , zgodnie z zależnościami (3.107) wyznacza się wartości kątów α_i . Ich znajomość pozwala na obliczenie parametrów operacji bazowych wszystkich warstw ortogonalnej struktury kratowej, zgodnie z równaniem (3.13) albo równaniem (3.14). Korzystając z wyznaczonych operacji bazowych można wyznaczyć współczynniki filtrów $\mathbf{h}$ i $\mathbf{g}$, zgodnie z algorytmem opisanym w podrozdziale 3.3. W ten sposób dokonuje się przekształcenia reprezentacji rozwiązania, zakodowanej w postaci osobnika, na faktyczne rozwiązanie, które może zostać poddane ocenie pod kątem optymalności (w algorytmie ewolucyjnym zwanej “doszycowaniem”).

4.3.2 Struktura algorytmu ewolucyjnego

W niniejszej rozprawie do optymalizacji postawionego problemu wykorzystany zostanie Prosty Algorytm Genetyczny (ang. *Simple Genetic Algorithm*, SGA [49]) z algorytmem wyboru osobników do następnej iteracji opartym o Strategie Ewolucyjne (ang. *Evolution Strategies*) [9, 10, 137]. Obliczenia rozpoczynają się od wylosowania początkowej populacji rozwiązań (oznaczymy P), liczącej μ osobników. Mając wylosowaną populację początkową, można rozpocząć obliczenia iteracyjne, które są powtarzane dopóki nie zostanie spełniony warunek stopu. Warunkiem stopu może być wykonanie podanej liczby iteracji bądź dojście do etapu, w którym nie uzyskuje się poprawy rozwiązania w kolejnych iteracjach. Każda iteracja (pokolenie) algorytmu ewolucyjnego rozpoczyna się od obliczenia przystosowania wszystkich osobników w populacji P . Obliczaniu przystosowania osobników poświęcony jest podrozdział 4.3.3. Po jego obliczeniu, tworzona jest populacja tymczasowa T , poprzez selekcję osobników z populacji P , licząca λ osobników, przy czym $\lambda > \mu$. Osobniki z populacji tymczasowej T poddawane są działaniu operatorów genetycznych krzyżowania i mutacji, w celu utworzenia nowych rozwiązań zadanego problemu. Następnie obliczane jest przystosowanie wszystkich nowych rozwiązań z populacji tymczasowej T . Na zakończenie iteracji generowana jest nowa populacja rozwiązań P w oparciu o wybraną strategię wyboru osobników do kolejnego pokolenia. Algorytm kończy się wyświetleniem najlepszego znalezionej rozwiązania. Schemat powyższego algorytmu ewolucyjnego przedstawiony został w ramce Algorytm 2 na stronie 108.

Selekcja osobników

Selekcja osobników w algorytmie genetycznym stanowi podstawę zbieżności algorytmu. Celem selekcji jest eliminowanie gorszych rozwiązań w kolejnych iteracjach algorytmu ewolucyjnego. Proces selekcji ma charakter losowy, musi jednak gwarantować większe szanse wybrania do następnej populacji osobników lepiej przystosowanych.

W niniejszej pracy zdecydowano się na zastosowanie selekcji turniejowej. W tej metodzie wybór osobnika do populacji tymczasowej T odbywa się poprzez wylosowanie z równym prawdopodobieństwem l osobników⁵, a następnie skopiowanie do populacji T osobnika o większym przystosowaniu. Losowanie powtarzane jest

⁵ l nazywane jest rozmiarem turnieju. W niniejszej rozprawie przyjęto $l = 2$.

Algorytm 2 Schemat algorytmu ewolucyjnego

- 1: Utwórz losową populację P złożoną z μ osobników
 - 2: **while** (warunek stopu niespełniony) **do**
 - 3: Oblicz przystosowanie osobników w populacji P
 - 4: Utwórz populację tymczasową T zawierającą λ osobników wybranych poprzez selekcję z populacji P
 - 5: Wykonaj krzyżowanie i mutację na osobnikach w populacji T
 - 6: Oblicz przystosowanie osobników w populacji T
 - 7: Zgodnie z przyjętą strategią ewolucyjną wybierz μ osobników by utworzyć nową populację P
 - 8: **end while**
 - 9: Wyświetl najlepszego osobnika w populacji P
-

λ razy. Należy podkreślić, że populacja P nie jest modyfikowana w trakcie trwania selekcji, a w szczególności nie dochodzi do usuwania z tej populacji osobników już wcześniej wylosowanych.

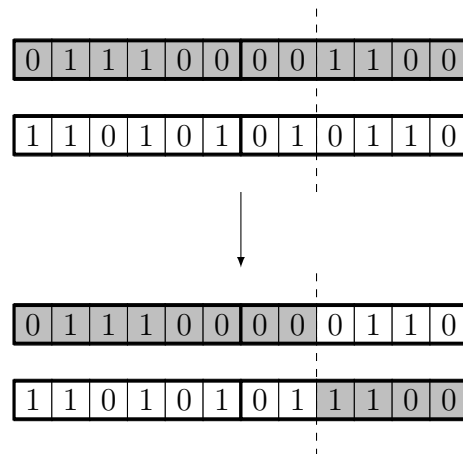
W literaturze istnieją również inne metody selekcji osobników. Najbardziej popularna wydaje się być selekcja za pomocą koła ruletki. W tej metodzie szanse wyboru osobnika do populacji tymczasowej T są wprost proporcjonalne do jego przystosowania, przy czym konieczne jest zagwarantowanie, że przystosowanie każdego osobnika jest liczbą dodatnią. Wymaga to przeprowadzenia normalizacji, np. do przedziału $(0, 1]$, ponieważ w przypadku postawionego problemu możliwe jest, że osobnik będzie miał ujemne przystosowanie. Autor zaimplementował zarówno selekcję turniejową jak i selekcję za pomocą koła ruletki. Prowadzone eksperymenty nie wykazały zauważalnego wpływu użytej metody selekcji na zbieżność algorytmu, dlatego ostatecznie zdecydowano się na pozostawienie metody niewymagającej normalizacji, a więc mniej kosztownej obliczeniowo. Inną metodą selekcji jest selekcja elitarna, która gwarantuje, że do nowej populacji wybrany zostanie najlepszy osobnik z bieżącej populacji. Ten rodzaj selekcji nie jest wprawdzie stosowany w niniejszej rozprawie, ale w praktyce identyczny efekt uzyskuje się dzięki zastosowaniu strategii ewolucyjnej $(\mu + \lambda)$.

Operatory krzyżowania i mutacji

Drugim – po selekcji – kluczowym elementem algorytmu ewolucyjnego są operatory genetyczne: operator krzyżowania [46] i operator mutacji [47]. Zapewniają

one zmienność populacji rozwiązań, czyli prowadzą do generowania nowych, dotychczas nieistniejących rozwiązań na podstawie rozwiązań już istniejących. Oba operatory działają na osobnikach, które zostały wybrane do populacji tymczasowej T poprzez selekcję.

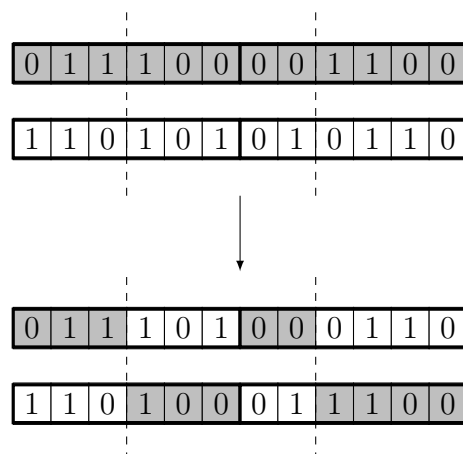
Operator krzyżowania działa na dwóch osobnikach, dokonując między nimi wymiany fragmentów ich genotypów. Każdy osobnik w populacji tymczasowej T może zostać wybrany do krzyżowania z prawdopodobieństwem p_c (najczęściej mieści się ono w przedziale 0.6-0.9). Jeśli osobnik został wybrany do krzyżowania, wtedy wybierany jest drugi osobnik, z którym zostanie on skrzyżowany, przy czym algorytm jest skonstruowany tak, że osobnik nie może zostać skrzyżowany z samym sobą. Po wybraniu dwóch osobników, losowany jest punkt krzyżowania, czyli miejsce w którym osobniki zostaną “przecięte” i wymieniony zostanie ich materiał genetyczny. W przedstawionym algorytmie genotyp osobnika jest traktowany jako jedna całość – nie jest uwzględniany fakt, że poszczególne fragmenty kodują niezależnie od siebie kąty φ_i . Taki rodzaj krzyżowania nazywany jest krzyżowaniem jednopunktowym. Jego schemat pokazuje Rysunek 4.3. Linia przerywana oznacza wylosowany punkt krzyżowania.



Rysunek 4.3: Schemat krzyżowania jednopunktowego.

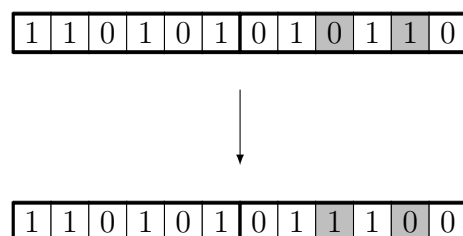
Alternatywnym sposobem krzyżowania jest krzyżowanie wielopunktowe. W tym przypadku w ramach każdego chromosomu kodującego kąt φ_i wybierany jest losowo punkt krzyżowania. Materiał genetyczny wymieniany jest pomiędzy odpowiednimi chromosomami. Schemat krzyżowania wielopunktowego pokazuje Rysunek 4.3.

Operator mutacji działa na pojedynczych bitach, kodujących osobniki znajdujące się w populacji T . Każdy bit może być wybrany do mutacji z prawdopodobień-



Rysunek 4.4: Schemat krzyżowania wielopunktowego.

stwem p_m . Najczęściej jest ono bardzo niewielkie – ok. 0.01-0.05. Wartości bitów wybranych do poddania procesowi mutacji zmieniane są na wartości przeciwne. Pokazane jest to na Rysunku 4.5, gdzie do mutacji wybrane zostały bity 1 oraz 3⁶, oba leżące w obrębie chromosomu c_2 . Operator mutacji może zmienić wartość chromosomu zarówno w sposób bardzo nieznaczny, jeśli mutacji zostanie poddany najmniej znaczący bit, jak i o bardzo dużą wartość, w przypadku zmutowania najbardziej znaczącego bitu.



Rysunek 4.5: Schemat działania operatora mutacji.

Strategie ewolucyjne

W podstawowej wersji Prostego Algorytmu Genetycznego po dokonaniu selekcji, krzyżowania i mutacji, stara populacja P jest usuwana, a populacja tymczasową T , licząca tyle samo osobników, staje się nową populacją P , używaną w kolejnej iteracji. W literaturze znane są również inne metody wyboru osobników do utworzenia nowej populacji P [137]. Autor niniejszej rozprawy zdecydował się na zastosowanie

⁶Bity w chromosomie numerowane są od 0, przy czym zerowy bit to bit najmniej znaczący.

metod wyboru opartych o strategię ewolucyjną [9, 10]⁷. Propozycja podyktowana jest obserwacjami, które pokazały, że w SGA zastosowanym do syntezy przekształceń falkowych nie zawsze dochodziło do eliminacji nisko przystosowanych rozwiązań, co prowadziło do destabilizacji procesu optymalizacji i obniżenia zbieżności algorytmu. Wprowadzenie strategii ewolucyjnych $(\mu + \lambda)$ oraz (μ, λ) pozwoliło na ustabilizowanie procesu optymalizacji i poprawę zbieżności. W celu zapobieżenia przedwczesnej zbieżności algorytmu ewolucyjnego, przy stosowaniu strategii ewolucyjnych, przed utworzeniem nowej populacji P , z populacji T eliminowane są osobniki identyczne.

W strategii $(\mu + \lambda)$ w celu utworzenia nowej populacji rozwiązań, wybieranych jest μ najlepiej przystosowanych osobników spośród pierwotnej populacji P jak i populacji tymczasowej T . Oznacza to, że już istniejące dobre rozwiązania z populacji P nie zostaną utracone (wspomniany wcześniej efekt selekcji elitarniej⁸), a jednocześnie nowe rozwiązania mają szansę wejść do populacji, pod warunkiem, że są wystarczająco dobre. Słabo przystosowane osobniki są eliminowane. Zachowywanie najlepszych rozwiązań może jednak prowadzić do stagnacji algorytmu i jego przedwczesnej zbieżności.

W strategii (μ, λ) , po utworzeniu populacji tymczasowej T , pierwotna populacja P jest usuwana. Do nowej populacji P wybieranych jest μ najlepiej przystosowanych osobników spośród λ osobników wchodzących w skład populacji tymczasowej

⁷Należy zaznaczyć, że termin “strategie ewolucyjne” jest z reguły używany w literaturze w kontekście rozwiązywania problemów, w których osobniki kodowane są za pomocą liczb rzeczywistych, a nie całkowitych. W tradycyjnym podejściu do strategii ewolucyjnych selekcja osobników do populacji tymczasowej odbywa się z równym prawdopodobieństwem, bez względu na przystosowanie. Operacja mutacji polega na dodaniu bądź odjęciu losowej liczby rzeczywistej od wybranego genu. Ponadto, operator mutacji posiada zdolność samoadaptacji, a więc przedział z którego losowana jest wartość, o jaką ma być zmieniony gen, jest zwiększany jeśli mutacja przynosiła poprawę przystosowania, bądź zmniejszany, jeśli spowodowała pogorszenie. W tradycyjnych strategiach ewolucyjnych inaczej działa również operator krzyżowania. W przypadku kodowania osobnika z użyciem liczb rzeczywistych, generuje on nowego osobnika albo poprzez uśrednienie wartości genów rodziców albo poprzez niezależne skopiowanie wartości każdego genu od losowo wybranego rodzica.

⁸Teoretycznie możliwe jest, że w populacji T znajdzie się więcej niż μ osobników lepiej przystosowanych od najlepiej przystosowanego osobnika w populacji P . Wtedy, przy generowaniu nowej populacji P , osobnik dotychczas najlepszy zostanie utracony, co pokazuje że strategia $(\mu + \lambda)$ nie jest równoważna selekcji elitarniej. W trakcie eksperymentów nie obserwowano jednak takiego efektu.

T. W przypadku tej strategii możliwa jest utrata już istniejących dobrych rozwiązań. W praktyce nie jest to jednak problem, gdyż rozwiązania potomne są najczęściej przynajmniej tak samo dobre jak ich rodzice, a ponadto nie dochodzi do przedwczesnego zdominowania populacji przez osobniki o dużym przystosowaniu. Jeśli w tej strategii przyjąć $\lambda = \mu$, to uzyskujemy prosty algorytm genetyczny, bez strategii ewolucyjnych.

4.3.3 Ocena przystosowania osobników w zadaniu osadzania cyfrowych znaków wodnych

W przypadku każdego problemu optymalizacyjnego kluczowym zagadnieniem jest dobre zdefiniowanie funkcji celu. W niniejszym podrozdziale wprowadzone zostaną kryteria oceny osobników, zgodnie z ideą podaną w podrozdziale 4.2. Przypomnijmy, że znak wodny osadzany będzie ze stałym zniekształceniem obrazu, osiąganym poprzez dobór siły osadzenia κ . Tym samym należy jedynie dokonać oceny osobników pod kątem separowalności. W tym celu, oprócz osadzanego znaku wodnego, generowany jest zbiór losowych znaków wodnych⁹. Przeprowadzane jest osadzanie znaku wodnego w dziedzinie DWT. Znak wodny jest ekstrahowany, a następnie obliczana jest korelacja tego znaku ze znakiem oryginalnym oraz ze znakami losowymi. Za wartość separowalności przyjmowana jest minimalna różnica wartości znormalizowanych korelacji wyliczonych pomiędzy: a) wyekstrahowanym znakiem wodnym a osadzonym znakiem wodnym oraz b) znormalizowana korelacja pomiędzy wyekstrahowanym znakiem wodnym a losowym znakiem wodnym. Większa separowalność wiąże się w sposób oczywisty ze wzrostem korelacji pomiędzy osadzonym i wyekstrahowanym znakiem wodnym.

Odporność na wybrane ataki zostanie zagwarantowana poprzez przeprowadzenie każdego z nich niezależnie na oznaczonym obrazie, a następnie obliczenie separowalności znaku wodnego wyekstrahowanego po przeprowadzonym ataku. W ten sposób każdemu osobnikowi przypisanych zostanie $K + 1$ przystosowań cząstkowych, gdzie K to ilość ataków, zgodnie ze wzorem:

$$F_j(k) = \min_i (C_j^{(k)} - C_r^{(i,k)}) \quad , \quad (4.8)$$

⁹W trakcie całego procesu optymalizacji używany jest cały czas ten sam zestaw losowych znaków wodnych.

gdzie $k = 1, \dots, K$ to numer ataku (przystosowanie dla $k = 0$ odpowiada separowalności bez przeprowadzonego ataku), j to indeks osobnika, $C_j^{(k)}$ to znormalizowana korelacja pomiędzy wyekstrahowanym znakiem wodnym a osadzonym znakiem wodnym, wyliczona dla j -tego osobnika po k -tym ataku, $C_r^{(i,k)}$ to znormalizowana korelacja pomiędzy wyekstrahowanym znakiem wodnym, a i -tym losowym znakiem wodnym, również wyliczona po k -tym ataku. Najmniejsza różnica pomiędzy tymi korelacjami wybierana jest jako przystosowanie cząstkowe osobnika dla k -tego ataku. Ponieważ $C_j^{(k)}, C_r^{(i,k)} \in [-1, 1]$, to $F_j(k) \in [-2, 2]$, jednak zgodnie z tym co zostało wcześniej powiedziane, zastosowanie selekcji turniejowej pozwala na nieprzeprowadzanie normalizacji¹⁰. Równanie (4.8) tworzy presję selekcyjną premiującą osobniki maksymalizujące separowalność, pomimo przeprowadzonego ataku. Jako ostateczne przystosowanie osobnika wybierane jest najmniejsze z wyliczonych przystosowań cząstkowych:

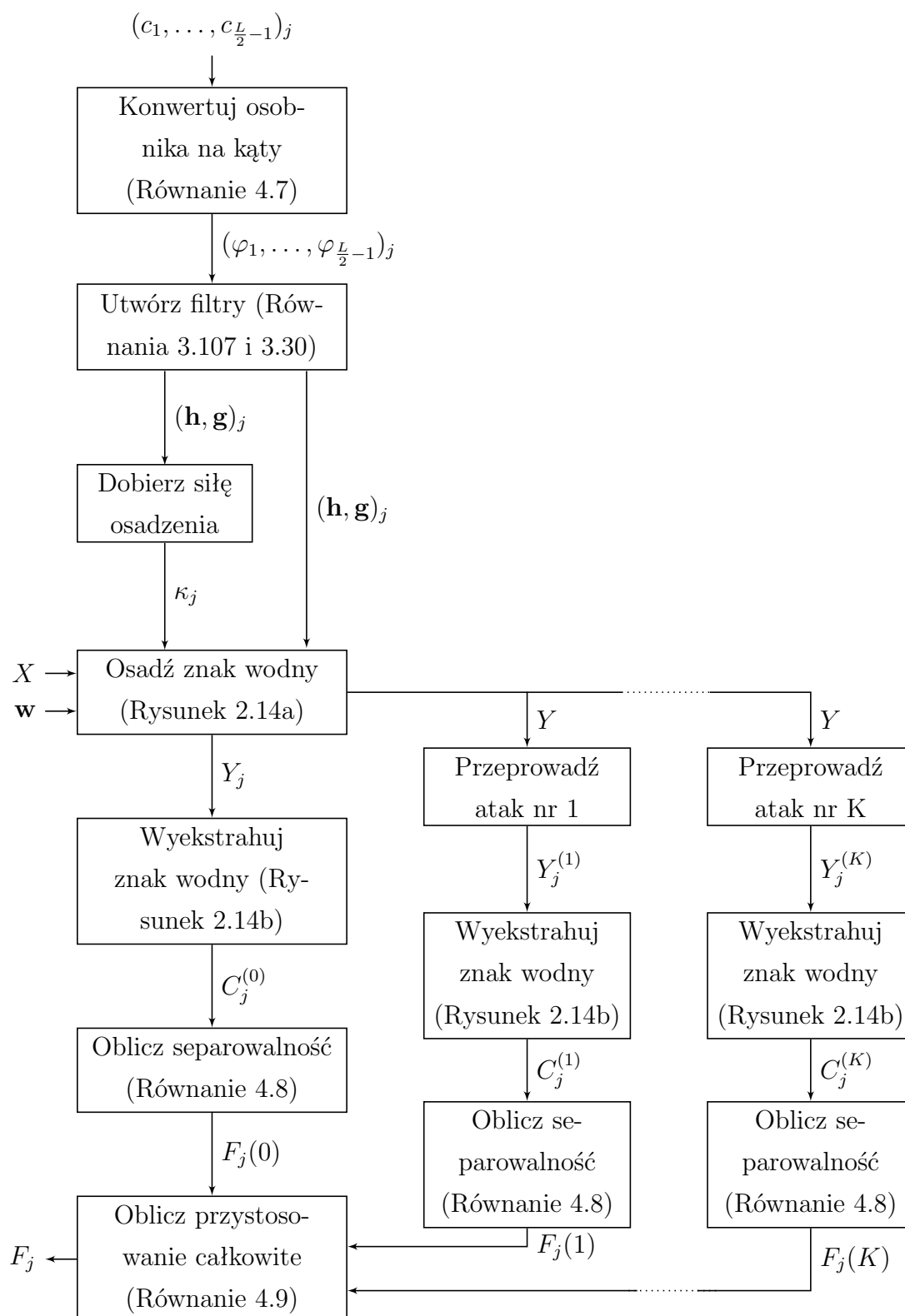
$$F_j = \min_k \{F_j(k)\} \quad . \quad (4.9)$$

To podejście gwarantuje, że zsyntezowane falki będą zapewniać wysoką odporność na wszystkie z przeprowadzanych ataków. Osobniki, które nie będą oferować wysokiej separowalności w przypadku chociażby jednego z ataków zostaną ocenione jako słabo przystosowane, co ostatecznie doprowadzi do ich eliminacji w toku działania algorytmu ewolucyjnego. Kompletny algorytm obliczania przystosowania osobnika zaprezentowany został na Rysunku 4.6.

4.4 Ograniczenia zaproponowanej metody

Poza omówionymi zaletami zaproponowanego podejścia – w szczególności możliwością syntezy falek do poprawy dowolnego algorytmu i według dowolnie przyjętych kryteriów – istnieją też pewne ograniczenia. Podstawową ideą proponowanego podejścia jest wykorzystanie oceny przetworzonego sygnału jako kryterium optymalizacji. Prowadzi to do pierwszego ograniczenia proponowanej metody: jej skuteczność jest uzależniona od możliwości oceny przetworzonego sygnału. Oczywiście jest, że jeśli nie jest możliwa ocena przetworzonego sygnału, to proponowana metoda nie może działać skutecznie. W przykładowym zagadnieniu osadzania cyfrowych znaków wodnych problem ten uwidacznia się przy ocenie jakości obrazu

¹⁰Wartość przystosowania osobnika staje się tym samym tożsama z wartością funkcji celu.



Rysunek 4.6: Ocena przystosowania osobnika. X to oryginalny obraz, Y to obraz z osadzonym znakiem wodnym $\mathbf{w}$, j to indeks ocenianego osobnika.

z osadzonym znakiem wodnym. Zastosowana miara jakości obrazu daje zadowalające rezultaty, ale uzyskiwane wyniki nie korelują w 100% z subiektywną jakością obrazu postrzeganą przez ludzi.

W wyniku zastosowania zaproponowanego podejścia powstaje pewna funkcja celu, dana w ogólnej postaci wzorem (4.1). Jak już zostało wspomniane, należy oczekiwać że będzie to funkcja nieciągła i silnie multimodalna (przykładowy wykres funkcji celu pokazuje Rysunek 5.5 na stronie 125). Prowadzi to do drugiego istotnego ograniczenia zaproponowanej metody: jej skuteczność jest uzależniona od możliwości wyznaczenia maksimum zdefiniowanej funkcji celu, a więc zależy od skuteczności użytego algorytmu optymalizacji. Ze względu na charakterystykę funkcji celu w postawionym problemie konieczne jest zastosowanie stochastycznych metod globalnego przeszukiwania, które nie gwarantują wyznaczenia globalnego maksimum. Jak zostanie pokazane w podrozdziale 5.3 zastosowany w niniejszej rozprawie algorytm ewolucyjny w pewnych sytuacjach nie jest w stanie wyznaczyć filtrów skuteczniejszych niż filtry dotychczas zaproponowane w literaturze.

Należy również jasno wyznaczyć zakres możliwości oferowanych przez adaptację funkcji bazowych przekształcenia falkowego w zadaniu osadzania cyfrowych znaków wodnych. Jak zostanie wykazane w Rozdziale 5, zaproponowane podejście pozwala zwiększyć odporność algorytmu osadzania znaków wodnych na ataki usuwające (w stosunku do falek zaproponowanych w literaturze). Adaptacja funkcji bazowych sama w sobie nie stanowi jednak rozwiązania wszystkich problemów związanych z bezpieczeństwem znaków wodnych. Nie jest w stanie m.in. podnieść odporności na ataki niszczące synchronizację z odbiornikiem, czyli na ataki geometryczne takie jak przycięcie, skalowanie, obrót – odporność na nie musi być gwarantowana przez algorytm osadzania i ekstrakcji znaku [68]. Rozwiązaniem może być tutaj zastosowanie dodatkowego znaku wodnego osadzanego w dziedzinie czasu i pełniącego rolę kalibracyjną. Pozwala on na odzyskanie synchronizacji po przeprowadzonym ataku, co umożliwia ekstrakcję znaku właściwego osadzonego w dziedzinie DWT (przykład takiego systemu do oznaczania sekwencji wideo można znaleźć w [97]). Ponadto zaproponowana metoda nie pozwala na zwiększenie odporności na wszelkiego rodzaju ataki protokołowe, kopiujące, czułościowe (ang. *sensitivity attacks*), a w szczególności nie czyni odwracalnych i quasi-odwracalnych [22] metod osadzania znaku wodnego metodami bezpiecznymi.

4.5 Podsumowanie i wnioski

W rozdziale zawarto opis metody syntezy falek proponowanej przez autora niniejszej rozprawy. Przedstawiono ogólny schemat algorytmu, pozwalający na zastosowanie dowolnej parametryzacji filtrów falkowych (zarówno ortogonalnych jak i biortogonalnych), dowolnego algorytmu przetwarzania sygnału pod kątem którego mają być syntezowana falki oraz dowolnej metody oceny przetworzonego sygnału. Jako przykładowe zadanie przetwarzania sygnałów, możliwe do usprawnienia przy użyciu wprowadzonej metody, wybrano algorytm osadzania cyfrowych znaków wodnych w dziedzinie dyskretnego przekształcenia falkowego. Omówiono wymagania stawiane sygnałowi przetworzonemu przez algorytm osadzania cyfrowego znaku wodnego oraz kwestię oceny jakości oznaczonego obrazu. Wprowadzono pojęcie osadzania znaku wodnego ze stałym zniekształceniem oznaczonego obrazu. Następnie zaprezentowany został Prosty Algorytm Genetyczny wykorzystany do globalnego przeszukiwania skonstruowanej funkcji celu. Szczegółowo omówiono zagadnienie reprezentacji struktury kratowej w algorytmie ewolucyjnym oraz algorytm obliczania przystosowania osobnika który, ze względu na zastosowanie selekcji turniejowej, jest jednocześnie algorytmem wyliczania wartości optymalizowanej funkcji celu.

Główną zaletą zaproponowanego podejścia jest jego uniwersalność. Optymalizowany element – funkcja bazowa przekształcenia falkowego – jest całkowicie niezależny od algorytmu osadzania i leży poza nim (patrz Rysunek 2.14 na stronie 53), co pozwala na zastosowanie proponowanej metody do optymalizacji działania już istniejących algorytmów osadzania cyfrowych znaków wodnych w dziedzinie przekształcenia falkowego. Proces syntezy optymalnej falki będzie odbywał się dla ustalonego obrazu i zestawu znaków wodnych oraz z zastosowaniem konkretnego algorytmu osadzającego. Tym samym falka adaptowana jest do tych trzech parametrów oraz do wybranych rodzajów ataków, co jest nowatorskim podejściem, do tej pory niestosowanym w literaturze. Proponowana metoda posiada również pewne ograniczenia. Jej skuteczność jest uzależniona od możliwości oceny przetworzonego sygnału oraz skuteczności zastosowanego algorytmu optymalizacji.

Rozdział 5

Wyniki badań eksperymentalnych

W Rozdziale 4 omówiono teoretyczne podstawy proponowanego podejścia do syntezy funkcji bazowych dyskretnego przekształcenia falkowego. W niniejszym rozdziale zaprezentowane zostaną wyniki eksperymentów, mające na celu praktyczną weryfikację skuteczności zaproponowanej metody oraz tez postawionych we wstępie rozprawy doktorskiej. Algorytmy przedstawione w Rozdziale 4 zostały przez autora zaimplementowane w środowisku Matlab. Do przeprowadzenia eksperymentów wybranych zostało 20 obrazów z bazy USC-SIPI [1]. Połowa z nich to obrazy naturalne, przedstawiające zdjęcia różnych obiektów. Druga połowa to tekstury. Obrazy testowe przedstawione zostały na Rysunku 5.1. W dalszej części rozdziału w celu łatwego odwoływania się do konkretnych rysunków, oznaczane one będą poprzez literę kolumny (A,B,C,D) i numer wiersza (od 1 do 5). Przykładowo: obrazek Lena będzie oznaczany jako B1, a odrzutowiec jako A5.

Opis każdego eksperymentu zawiera jego cel, opis zastosowanej metody badawczej oraz prezentację i dyskusję wyników. Ze względu na ilość obrazów, w wynikach eksperymentów podawane są albo reprezentatywne wyniki dla wybranego obrazu testowego albo średnie wyniki dla wszystkich obrazów. W eksperymentach zastosowano 3 albo 4 poziomy dekompozycji obrazu i osadzanie w paśmie detali najwyższego poziomu zgodnie z opisem w podrozdziale 2.8.3. Wykorzystano znaki wodne o długościach 512 albo 1024 oraz losowych wartościach ze zbioru $\{-1, 1\}$. Do wyliczania separowalności wygenerowany został zestaw tysiąca znaków wodnych. Ustawienia algorytmu ewolucyjnego zostały dobrane przez autora na podstawie eksperymentów testowych. Tabela 5.1 prezentuje zestawienie użytych wartości parametrów.



Rysunek 5.1: Obrazy testowe. Pierwsze dwie kolumny przedstawiają zdjęcia, pozostałe dwie kolumny przedstawiają obrazy tekstur.

Parametr	Wartość
precyzja m	16
rozmiar populacji podstawowej (μ)	40
rozmiar populacji tymczasowej (λ)	80
prawdopodobieństwo krzyżowania p_c	0.95
prawdopodobieństwo mutacji p_m	0.1
maksymalna ilość pokoleń	12
rodzaj krzyżowania	wielopunktowe
strategia ewolucyjna	$(\mu + \lambda)$

Tabela 5.1: Wartości parametrów algorytmu ewolucyjnego użyte do przeprowadzenia eksperymentów.

5.1 Badania dziedziny problemu

Przed przystąpieniem do eksperymentów nad syntezą falek, przeprowadzone zostały doświadczenia mające na celu analizę postawionego problemu. Eksperymenty miały na celu:

1. ustalenie zależności między siłą osadzenia, korelacją, jakością obrazu,
2. zbadanie wpływu ataków na separowalność,
3. poznanie kształtu optymalizowanej funkcji celu.

Eksperyment 1

Cel : Analiza wpływu siły osadzenia znaku wodnego na separowalność wyekstrahowanego znaku i jakość oznaczonego obrazu.

Metoda : Osadzano niezależnie dwa znaki wodne w obrazku B1 na trzecim oraz czwartym poziomie analizy DWT, przyjmując różne wartości siły osadzenia κ : 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.5, 5. Dekompozycji dokonano przy użyciu falki Daubechies 8.

Analiza wyników : Rezultat eksperymentu pokazują Rysunki 5.2 (str. 120) oraz 5.3 (str. 121). Na obu z nich widać, że wraz ze wzrostem siły osadzenia κ rośnie separowalność wyekstrahowanego znaku $F_j(0)$, ale spada jakość obrazu



(a) $\kappa = 0.25$, WBI = 0.998965,
 $F_j(0) = 0.111627$



(b) $\kappa = 0.5$, WBI = 0.995896,
 $F_j(0) = 0.280897$



(c) $\kappa = 0.75$, WBI = 0.990886,
 $F_j(0) = 0.410318$



(d) $\kappa = 1$, WBI = 0.984160,
 $F_j(0) = 0.503913$



(e) $\kappa = 1.5$, WBI = 0.966452,
 $F_j(0) = 0.620010$



(f) $\kappa = 5$, WBI = 0.788295,
 $F_j(0) = 0.788804$

Rysunek 5.2: Wpływ siły osadzenia (κ) na jakość oznaczonego obrazu (WBI) i separowalność wyekstrahowanego znaku wodnego ($F_j(0)$). Falka: Daubechies 8. Długość znaku: 512. Ilość poziomów DWT: 3.



(a) $\kappa = 0.25$, WBI = 0.997368,
 $F_j(0) = 0.108287$



(b) $\kappa = 0.5$, WBI = 0.989613,
 $F_j(0) = 0.274566$



(c) $\kappa = 0.75$, WBI = 0.977129,
 $F_j(0) = 0.402835$



(d) $\kappa = 1$, WBI = 0.960559,
 $F_j(0) = 0.491300$



(e) $\kappa = 1.5$, WBI = 0.918006,
 $F_j(0) = 0.599802$



(f) $\kappa = 5$, WBI = 0.576702,
 $F_j(0) = 0.748851$

Rysunek 5.3: Wpływ siły osadzenia (κ) na jakość oznaczonego obrazu (WBI) i korelację wyekstrahowanego znaku wodnego ($F_j(0)$). Falka: Daubechies 8. Długość znaku: 1024. Ilość poziomów DWT: 4.

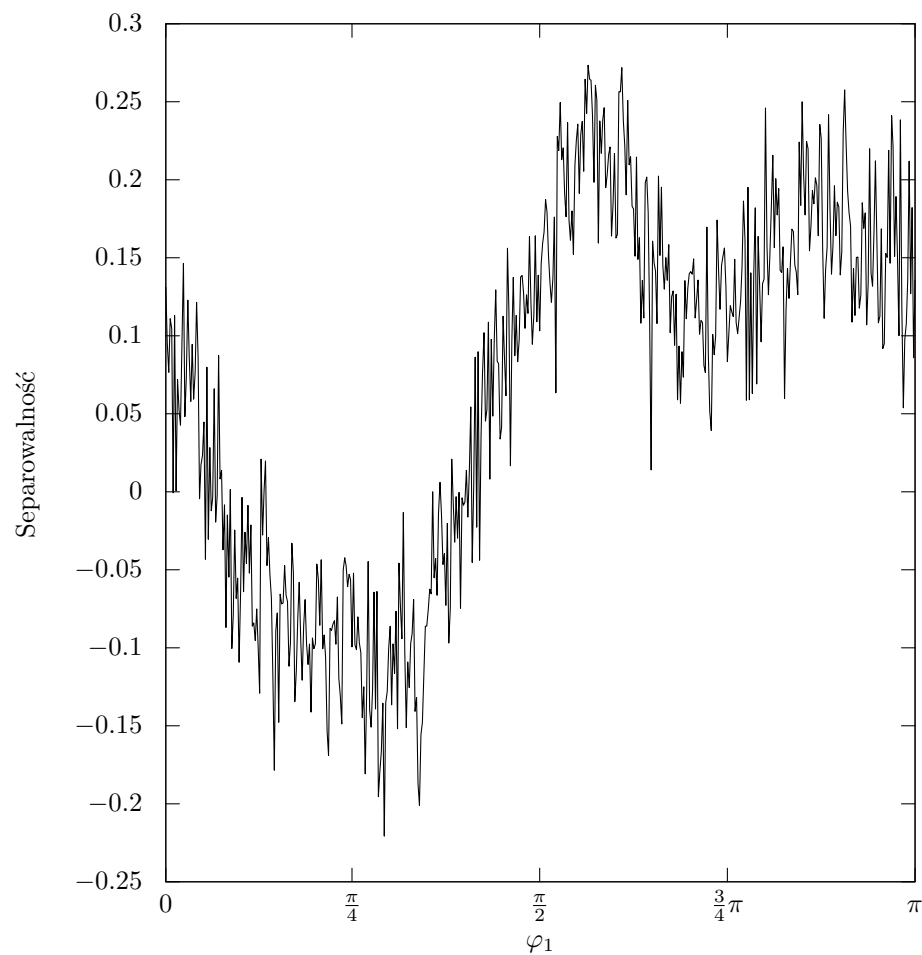
wyrażona wskaźnikiem WBI. W trakcie prowadzenia eksperymentu zaobserwowano, że zmiana ilości poziomów DWT wymaga dostosowania długości znaku wodnego. Dla trzech poziomów DWT użyto znaku o długości 512, uznając ją za dobry kompromis pomiędzy jakością obrazu a korelacją. Po zwiększeniu ilości poziomów DWT do 4 zaobserwowano drastyczny spadek separowalności. Przeprowadzone przez autora próby pokazały, że rozwiązaniem może być tutaj zwiększenie długości znaku wodnego do 1024. Ta wartość oferuje rozsądny kompromis pomiędzy separowalnością a jakością obrazu. Należy tutaj jednak zauważyć, że przy tej samej sile osadzenia, dla trzech poziomów rozkładu zawsze uzyskuje się lepszą separowalność i jakość obrazu, niż przy czterech poziomach. Jest to obserwacja zgodna z wiedzą dostarczaną przez teorię falkową. Modyfikacja współczynników detali na niskich poziomach analizy powoduje mniejsze zmiany energii obrazka (mniejsze zniekształcenia). Tak więc im niższy poziom detali, tym większej względnej modyfikacji współczynników można dokonać – co prowadzi do uzyskania większej korelacji – nie pogarszając przy tym znacząco jakości obrazu. Detale niskiego poziomu są jednak bardzo podatne na ataki, w szczególności na kompresję, dlatego też w niniejszej rozprawie zdecydowano się na osadzanie znaku na przynajmniej trzecim poziomie falkowej analizy sygnału. W wyniku eksperymentów ustalono arbitralnie, że akceptowalny poziom zniekształcenia obrazu przy osadzaniu na trzecim poziomie DWT wynosi pomiędzy 0.995 a 0.996. Dla czterech poziomów DWT trzeba było przyjąć wartość niższą, ok. 0.99. Porównując Rysunki 5.2c i 5.3b, których jakość jest wg. wskaźnika WBI prawie identyczna (różnica nieco ponad 0.001), można dojść do wniosku, że zastosowana miara jakości nie odzwierciedla idealnie różnicy w jakości oznaczonych obrazów. Niestety, wydaje się że na chwilę obecną nie istnieją miary jakości obrazu potrafiące dokładnie odzwierciedlać subiektywne różnice dostrzegane przez ludzi pomiędzy kilkoma obrazami. Można tutaj stwierdzić, że celowym byłoby zaprojektowanie miary jakości obrazu przeznaczonej do oceny zniekształceń powstających w wyniku osadzania cyfrowych znaków wodnych, przy czym zastosowanie apriorycznej wiedzy na temat charakteru artefaktów powstających w wyniku wprowadzania cyfrowego znaku wodnego do obrazu powinno pozwolić na osiągnięcie wyników lepszych niż w przypadku generycznych metod oceny obrazu, nie uwzględniających takiej wiedzy.

Eksperyment 2

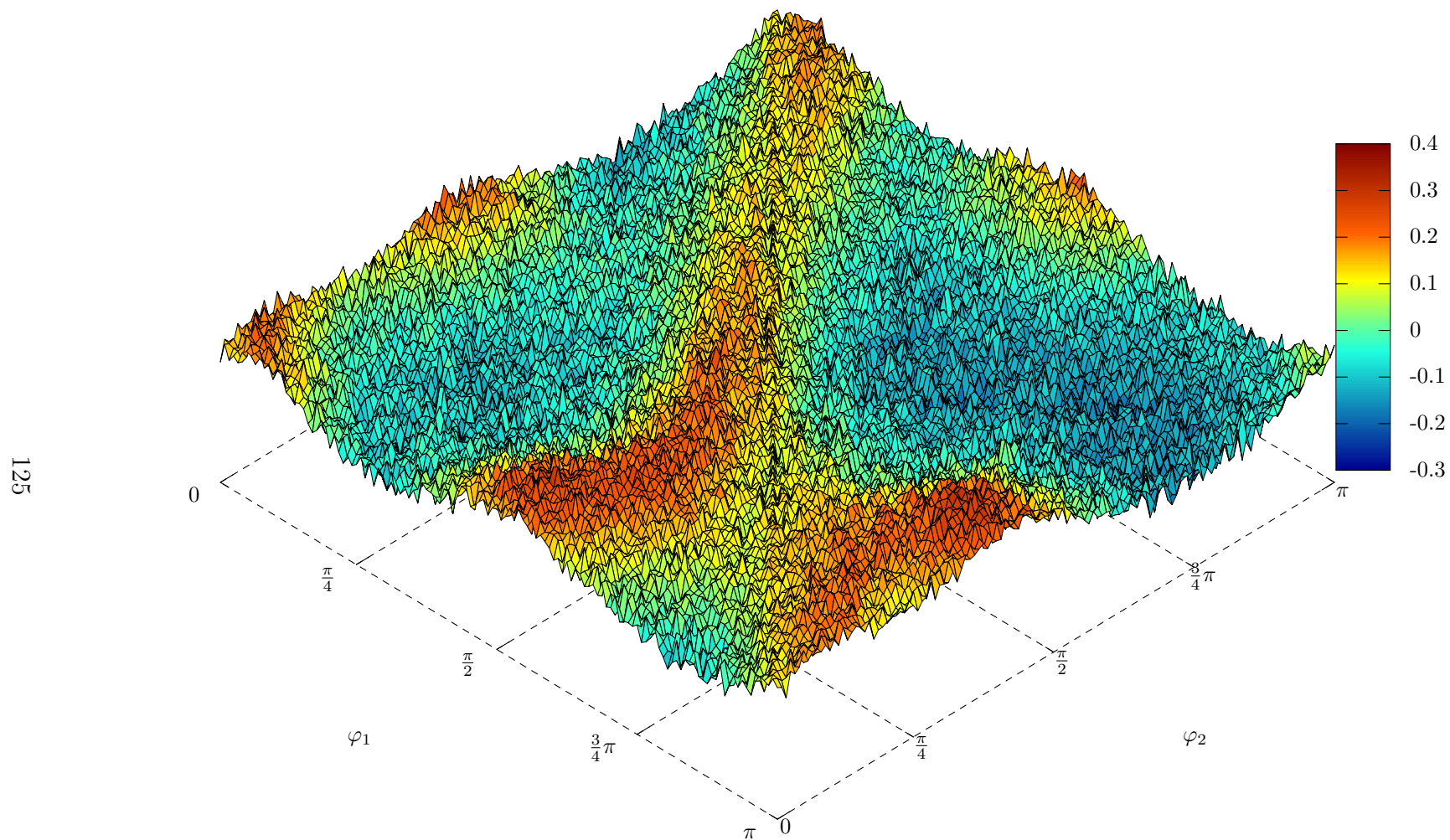
Cel : Zbadanie wpływu zastosowanej falki na separowalność znaków wodnych osadzonych przy stałym zniekształceniu oznaczanego obrazu (zmienna siła osadzenia κ).

Metoda : Obliczono wartość współczynników filtrów w równoodległych punktach dziedziny, odpowiadających wartościom kątów φ_i , a następnie osadzono za pomocą każdego z tych filtrów znak wodny w obrazie B1 używając trzech poziomów analizy obrazu. Na każdym oznaczonym obrazie przeprowadzono niezależnie wybrane ataki: kompresję JPEG, filtrację medianową, filtrację dolnoprzepustową, redukcję głębi kolorów do 4 bitów, zmniejszenie do 60% oryginalnego rozmiaru, a następnie przeskalowanie do rozmiaru pierwotnego oraz dodanie szumu o rozkładzie normalnym. Po przeprowadzeniu każdego z ataków wyliczono separowalność. Dziedzinę zbadano w najprostszych przypadkach filtra o długości 4 i 6, ponieważ jest ona wtedy jedno bądź dwuwymiarowa, co pozwala na wizualną prezentację wyników. W przypadku jednowymiarowej dziedziny przyjęto dokładność $m = 9$ bitów, co odpowiada zbadaniu 512 punktów dziedziny, czyli zmianie wartości kąta φ_1 o ok. 0.35° . W przypadku dziedziny dwuwymiarowej przyjęto mniejszą dokładność $m = 7$, co odpowiada zbadaniu 16384 punktów dziedziny, czyli zmianie wartości kątów φ_1 i φ_2 o ok. 1.4° .

Analiza wyników : Rysunki 5.4 i 5.5 przedstawiają wykresy na których zaznaczono wszystkie zbadane punkty dziedziny – każdy punkt to jeden filtr. Wartość na osi pionowej reprezentuje uzyskaną separowalność. Wykresy wykonano uwzględniając cztery wybrane ataki, co zostanie uzasadnione w następnym eksperymencie. Wykresy pozwalają na uzasadnienie stwierdzenia, że zastosowany filtr falkowy ma istotny wpływ na skuteczność procesu osadzania i ekstrakcji cyfrowego znaku wodnego. Na obu wykresach da się wyraźnie wskazać rejony, w których separowalność znacząco rośnie. W obu przypadkach widać, że funkcja celu jest bardzo silnie multimodalna – na ogólny trend zmian separowalności nałożone są szybkie wahania funkcji celu, co pokazuje że nawet niewielka zmiana użytego filtra może mieć duży wpływ na końcowy rezultat detekcji znaku. Uzasadnia to porzucenie gradientowej metody optymalizacji na rzecz metody opartej o stochastyczne przeszukiwanie funkcji celu.



Rysunek 5.4: Wykres dziedzin problemu w przypadku syntezy filtra o długości 4 dla obrazka B1 przy czterech atakach: kompresji JPEG, filtracji medianowej, filtracji dolnoprzepustowej i redukcji kolorów. Stałe zniekształcenie $WBI = 0.996$, 3 poziomy DWT.



Rysunek 5.5: Wykres dziedziny problemu w przypadku syntezy filtra o długości 6 dla obrazka B1 przy czterech atakach: kompresji JPEG, filtracji medianowej, filtracji dolnoprzepustowej i redukcji kolorów. Stałe zniekształcenie $WBI = 0.996$, 3 poziomy DWT.

Eksperyment 3

Cel : Zbadanie jak wiele wartości funkcji celu ulega pogorszeniu w wyniku przeprowadzania ataków.

Metoda : Dysponując badaniem dziedziny z poprzedniego eksperymentu badano wpływ przeprowadzanych ataków na funkcję celu. Przeanalizowano w jakim stopniu uwzględnianie kolejnych ataków prowadzi do zmniejszenia wartości funkcji celu (podejście to wynika bezpośrednio z Równania (4.9) określającego ostateczne przystosowanie osobnika).

	filtr dolnoprzep.	skalowanie	filtr medianowy	redukcja kolorów	szum
osobno	211	211	154	0	0
kumulatywnie	211	110	2	0	0

Tabela 5.2: Wpływ ataków na separowalność dla dziedziny jednowymiarowej. Wartości w tabeli pokazują w jak wielu z 512 punktów dziedziny uległa pogorszeniu separowalność, przy założeniu że wcześniej wykonano atak kompresją JPEG.

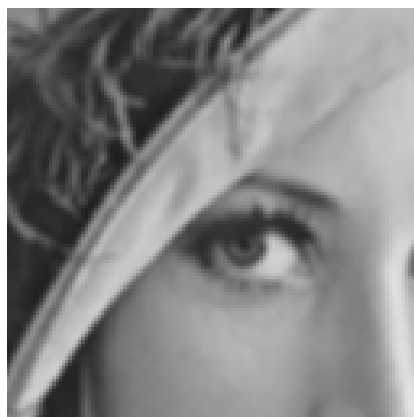
	filtr dolnoprzep.	skalowanie	filtr medianowy	redukcja kolorów	szum
osobno	5958	5957	4697	0	0
kumulatywnie	5958	3407	1404	0	0

Tabela 5.3: Wpływ ataków na separowalność dla dziedziny dwuwymiarowej. Wartości w tabeli pokazują w jak wielu z 16384 punktów dziedziny uległa pogorszeniu separowalność, przy założeniu że wcześniej wykonano atak kompresją JPEG.

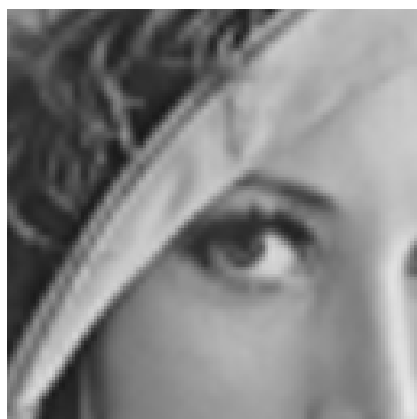
Analiza wyników : Wyniki eksperymentów zostały zaprezentowane w Tabelach 5.2 i 5.3. W obu przypadkach założono, że atakiem przeprowadzanym zawsze jest kompresja JPEG. Wynika to z faktu, że w zastosowaniach praktycznych obrazy najczęściej są kompresowane stratnie. Ponadto zaobserwowano, że wszystkie przeprowadzone ataki, poza redukcją kolorów i dodaniem szumu, powodują pogorszenie wszystkich wartości separowalności bez przeprowadzania żadnego ataku. Pierwszy wiersz obu tabel zawiera informację o tym jak wiele wartości separowalności uległo pogorszeniu w wyniku przeprowadzenia



(a) kompresja JPEG



(b) filtracja dolnoprzepustowa



(c) skalowanie



(d) filtracja medianowa



(e) redukcja kolorów



(f) szum

Rysunek 5.6: Wpływ ataków na obraz.

danego ataku, przy czym zakłada się, że przeprowadzany jest tylko podany atak i kompresja JPEG. Drugi wiersz zawiera tę samą informację, ale przy założeniu że ataki przeprowadzane są kumulatywnie, np. wartość 1404 w drugim wierszu Tabeli 5.3 informuje, że w wyniku przeprowadzenia ataku filtracją medianową pogorszeniu uległo 1404 z 16384 punktów dziedziny, przy założeniu że wcześniej wykonane zostały kompresja JPEG, filtracja dolnoprzepustowa i skalowanie. Na podstawie zaprezentowanych tabel można wnioskować, że najbardziej inwazyjnymi atakami są kompresja JPEG, filtracja dolnoprzepustowa i medianowa oraz skalowanie. Redukcja kolorów oraz dodanie szumu nie są w stanie realnie zagrozić osadzonemu znakowi wodnemu. Dlatego też tylko te cztery ataki będą uwzględniane w eksperymentach. Ciekawe jest jednak porównanie wpływu ataku na wygląd obrazu, pokazane na Rysunku 5.6. Widać z niego, że filtracja dolnoprzepustowa, medianowa i skalowanie jest prawie niezauważalna dla ludzkiego oka – powoduje jedynie niewielkie rozmycie obrazu. Najbardziej zauważalne zniekształcenia powstają poprzez dodanie szumu, który jednak nie wpływa na skuteczność ekstrakcji znaku, przy założeniu że jako atak uwzględniana jest kompresja JPEG. Redukcja kolorów oraz kompresja JPEG również są bardzo zauważalne dla ludzkiego oka, jednak tylko ten drugi atak stanowi poważne zagrożenie z punktu widzenia ekstrakcji znaku.

5.2 Synteza filtrów

Eksperymenty opisane w podrozdziale 5.1 pozwoliły lepiej zrozumieć specyfikę badanego problemu. Dzięki nim możliwe było odpowiednie dobranie parametrów do eksperymentów mających na celu udowodnienie tez postawionych we wstępie rozprawy.

Eksperyment 4

Cel : Udowodnienie słuszności pierwszej tezy niniejszej rozprawy doktorskiej poprzez syntezę ortogonalnych falek zapewniających lepszą separowalność od falek dotychczas zaproponowanych w literaturze, przy założeniu stałego zniekształcenia oznaczonego obrazu.

Metoda : Dla każdego z obrazów testowych przeprowadzono syntezę falki zgodnie z opisem zamieszczonym w podrozdziale 4.3. We wszystkich eksperymentach użyto wspólnego zestawu znaków wodnych. Dla każdego obrazka wygenerowano filtry o długości 4, 6, 8, 12 i 20. Eksperyment wykonano dla znaków wodnych osadzanych na trzecim albo na czwartym poziomie analizy DWT, stosując się do wniosków wyciągniętych w Eksperymentcie 1. Dla trzech poziomów analizy obrazu przyjęto stałe zniekształcenie obrazu $WBI = 0.996$. Dla czterech poziomów analizy obrazu przyjęto nieco mniejszą wartość $WBI = 0.99$. Siła osadzenia κ dostosowywana była z dokładnością 10^{-5} za pomocą funkcji `fmincon` dostępnej w środowisku Matlab. Przyjęto ustawienia algorytmu ewolucyjnego jak w Tabeli 5.1. Jeśli zsyntezowana falka nie zapewniała największej separowalności we wszystkich przypadkach, tj. choć jedna z falek zaproponowanych w literaturze okazywała się lepsza w przypadku któregośkolwiek ataku, próba syntezy była ponawiana od początku.

Analiza wyników : Przykładowe wyniki dla czterech obrazków (obrazów naturalnych A1 i A2 oraz tekstur C3 i D4) przedstawiono w Tabelach 5.4-5.11 na stronach 131-138. Tabele 5.4, 5.6, 5.8 i 5.10 przedstawiają wyniki syntezy dla znaku osadzanego na trzecim poziomie DWT, tabele 5.5, 5.7, 5.9 i 5.11 przedstawiają wyniki syntezy dla znaku osadzanego na czwartym poziomie DWT. Każda kolumna zawiera, uporządkowane malejąco, wartości separowalności dla filtrów adaptacyjnych oraz filtrów znanych z literatury¹. Przyjęto następujące skróty nazw falek: adaptacyjne – **A**, Haar – Ha, Daubechies – D, Coiflet – C, Symlet – S, LeGall 5/3 [65] – *LG*, Cohen-Daubechies-Feauveau 9/7 [18] – *CDF*, Antonini 9/7 [5] – *An*, Odegard 9/7 [29] – *Od*, grupa falek zaproponowana przez Villasenora i innych (13/11, 6/10, 5/3, 2/6, 9/3) [122] – od *V2* do *V6*. Falki ortogonalne (z wyjątkiem falki Haara) posiadają dodatkowo w oznaczeniu liczbę, określającą ich długość. Falki biortogonalne zostały wyróżnione kursywą, falki adaptacyjne pogrubioną czcionką. Kolejne kolumny tabel przedstawiają separowalność w przypadku braku ataku, po wykonaniu kompresji JPEG, filtracji medianowej, filtracji dolnoprzepustowej i skalowaniu.

¹Współczynniki falek zaczerpnięte zostały z dostępnego w środowisku Matlab pakietu Wavelet Toolbox oraz programu Wavelet Image Compression Construction Kit autorstwa Geoffa Davisa [29].

Wartości separowalności uzyskane dla znanych falek w pełni potwierdzają wyniki uzyskane przez Dietze i Jassima [35] – nie można wskazać żadnej falki, która byłaby najlepsza. Kolejność filtrów zmienia się zupełnie w zależności od obrazka, ilości poziomów DWT, a także pod wpływem ataków, np. dla obrazka A2 na trzecim poziomie osadzenia (Tabela 5.6), w zależności od przeprowadzonego ataku, najlepsze są falki C6, C12 i S12. Zaobserwować można, że ranking falek zmienia się zupełnie pomiędzy poszczególnymi obrazkami, a także dla tego samego obrazka w wyniku zmiany ilości poziomów DWT. Najbardziej widoczne jest to dla falki D8. Dla obrazka C3 przy trzech poziomach DWT (Tabela 5.8) praktycznie nie nadawała się ona do osadzania znaku (brak separowalności – tak słaby wynik okazał się bardzo dużym zaskoczeniem). Po zmianie ilości poziomów DWT na 4 (Tabela 5.9), D8 znalazła się w połowie rankingu. Z kolei dla obrazka A2 przy czterech poziomach DWT (Tabela 5.7) okazała się ona najlepszą z falek nieadaptacyjnych. Uzasadnionym jest więc wniosek, że skuteczność osadzania cyfrowych znaków wodnych w dziedzinie DWT, przy zastosowaniu falek nieadaptacyjnych, jest silnie uzależniona od oznaczanego obrazka. Rozwiązaniem tego problemu okazują się być falki adaptacyjne. Jak widać z Tabel 5.4-5.11, dla każdego obrazka i dla każdego ataku, bez względu na zastosowaną w eksperymencie ilość poziomów DWT oraz wymaganą długość filtra adaptacyjnego, udało się uzyskać falki oferujące lepszą separowalność od falek nieadaptacyjnych². Na Rysunkach 5.7 i 5.8 przedstawiono przykładowe funkcje bazowe zsyntezowane w ramach eksperymentu dla obrazków A2 i D4 przy osadzania znaku wodnego na trzecim poziomie DWT. Zaobserwować można, że niektóre ze zsyntezowanych funkcji skalujących są bardzo podobne do funkcji nieadaptacyjnych znanych z literatury. Dobrym przykładem jest tutaj funkcja z Rysunku 5.8b, przypominająca swoim kształtem funkcję Coiflet 6. Ich porównanie przedstawiono na Rysunku 5.9 na stronie 141. Z Tabeli 5.10 widać, że najlepszą z falek nieadaptacyjnych okazał się właśnie Coiflet 6. Widać więc, że niewielka zmiana współczynników tej falki pozwala na uzyskanie lepszej separowalności.

²Z tabel widać, że pozycja falek adaptacyjnych w rankingu zmienia się w wyniku przeprowadzania ataków. Spowodowane jest to faktem, że każda falka adaptacyjna syntezowana była niezależnie.

bez ataku		kompresja JPEG		filtracja medianowa		filtracja dolnoprzepust.		skalowanie	
A6	0.405	A6	0.345	A6	0.366	A6	0.330	A6	0.324
A4	0.354	A4	0.277	A4	0.300	A4	0.305	A20	0.278
A8	0.340	A20	0.277	A8	0.298	A12	0.289	A8	0.271
A20	0.334	A12	0.276	A20	0.287	A8	0.268	A4	0.265
A12	0.315	A8	0.268	A12	0.285	A20	0.262	A12	0.264
<i>V4</i>	0.311	<i>V4</i>	0.268	<i>V4</i>	0.273	<i>V6</i>	0.257	D8	0.245
D8	0.295	<i>V6</i>	0.254	D8	0.260	D8	0.255	<i>V4</i>	0.243
<i>V6</i>	0.287	<i>V3</i>	0.235	<i>V3</i>	0.260	<i>V3</i>	0.249	<i>V6</i>	0.236
<i>V3</i>	0.280	D8	0.234	<i>V6</i>	0.250	<i>V4</i>	0.248	<i>LG</i>	0.221
S8	0.265	S8	0.216	S8	0.226	<i>LG</i>	0.224	S8	0.203
<i>LG</i>	0.257	<i>LG</i>	0.204	C18	0.221	<i>An</i>	0.205	<i>Od</i>	0.200
<i>An</i>	0.254	C18	0.199	<i>An</i>	0.220	S12	0.198	<i>V2</i>	0.195
<i>CDF</i>	0.252	S12	0.198	<i>CDF</i>	0.208	C18	0.191	<i>CDF</i>	0.191
C18	0.249	<i>CDF</i>	0.196	<i>LG</i>	0.208	<i>CDF</i>	0.188	<i>V3</i>	0.180
<i>V2</i>	0.234	<i>Od</i>	0.191	S12	0.202	<i>V2</i>	0.182	C12	0.179
S12	0.232	<i>V2</i>	0.191	<i>V2</i>	0.200	C12	0.177	<i>An</i>	0.179
<i>Od</i>	0.230	<i>An</i>	0.186	<i>Od</i>	0.196	S8	0.175	C18	0.146
D4	0.226	D6	0.181	C12	0.182	<i>Od</i>	0.174	D6	0.143
D6	0.222	C12	0.168	D6	0.178	D4	0.165	C6	0.136
C6	0.218	C6	0.132	D4	0.174	<i>V5</i>	0.123	S10	0.127
C12	0.214	<i>V5</i>	0.130	C6	0.153	C6	0.123	S12	0.125
<i>V5</i>	0.188	S10	0.128	<i>V5</i>	0.148	S10	0.120	D4	0.123
Ha	0.172	D4	0.120	S10	0.141	D6	0.109	<i>V5</i>	0.029
S10	0.171	Ha	0.086	Ha	0.091	Ha	0.067	Ha	−0.009

Tabela 5.4: Separowalność znaku wodnego osadzonego na trzecim poziomie DWT w obrazku A1 (obraz naturalny). Czcionką zwykłą oznaczono falki ortogonalne znane z literatury, kursywą oznaczono falki biortogonalne znane z literatury, czcionką pogrubioną oznaczono zsyntezowane falki ortogonalne.

bez ataku		kompresja JPEG		filtracja medianowa		filtracja dolnoprzepust.		skalowanie	
A4	0.343	A4	0.330	A4	0.326	A4	0.319	A4	0.319
A12	0.331	A20	0.317	A20	0.316	A20	0.311	A20	0.309
A20	0.327	A8	0.312	A8	0.306	A8	0.306	A12	0.302
A6	0.327	A6	0.310	A12	0.305	A12	0.298	A8	0.302
A8	0.317	A12	0.303	A6	0.305	A6	0.296	A6	0.296
LG	0.302	V5	0.293	LG	0.284	LG	0.282	LG	0.263
V6	0.296	V6	0.293	V6	0.280	V6	0.275	V5	0.262
V5	0.293	LG	0.292	V5	0.277	V5	0.273	V6	0.261
Ha	0.267	Ha	0.267	D8	0.253	C18	0.254	Od	0.237
D8	0.265	D8	0.265	C18	0.249	C6	0.238	C6	0.235
C18	0.260	C18	0.255	C6	0.242	D8	0.237	D4	0.228
D4	0.258	CDF	0.251	D4	0.239	S10	0.234	S10	0.225
C6	0.257	Od	0.248	S10	0.238	D4	0.228	CDF	0.224
CDF	0.252	D4	0.246	Od	0.237	D6	0.222	C18	0.217
Od	0.249	S10	0.242	CDF	0.234	Ha	0.221	D6	0.216
S10	0.245	C6	0.240	Ha	0.229	Od	0.220	D8	0.212
D6	0.233	D6	0.231	D6	0.224	CDF	0.220	An	0.208
V3	0.228	V3	0.228	V3	0.219	V3	0.219	S8	0.196
V2	0.221	V2	0.221	V2	0.213	S8	0.205	Ha	0.192
S12	0.220	S12	0.217	S12	0.209	An	0.203	V3	0.189
S8	0.218	S8	0.214	S8	0.208	V2	0.203	S12	0.188
V4	0.215	An	0.212	An	0.205	S12	0.201	V4	0.188
An	0.214	C12	0.206	C12	0.202	V4	0.182	V2	0.187
C12	0.210	V4	0.204	V4	0.197	C12	0.180	C12	0.173

Tabela 5.5: Separowalność znaku wodnego osadzonego na czwartym poziomie DWT w obrazku A1 (obraz naturalny). Czcionką zwykłą oznaczono falki ortogonalne znane z literatury, kursywą oznaczono falki biortogonalne znane z literatury, czcionką pogrubioną oznaczono zsyntezowane falki ortogonalne.

bez ataku		kompresja JPEG		filtracja medianowa		filtracja dolnoprzepust.		skalowanie	
A6	0.327	A6	0.302	A6	0.311	A6	0.315	A6	0.311
A12	0.311	A8	0.279	A8	0.275	A20	0.272	A8	0.268
A8	0.306	A4	0.268	A20	0.270	A8	0.268	A4	0.263
A4	0.291	A20	0.265	A4	0.262	A4	0.258	A20	0.258
A20	0.281	A12	0.233	A12	0.251	A12	0.249	A12	0.246
C6	0.273	C12	0.230	C6	0.242	S12	0.242	C6	0.239
D4	0.265	V3	0.226	S12	0.241	C6	0.241	D4	0.226
S12	0.259	S12	0.224	C12	0.237	C12	0.238	C12	0.214
Ha	0.251	C6	0.224	V2	0.231	V6	0.235	V2	0.205
C12	0.250	V5	0.217	V6	0.226	V2	0.230	V3	0.204
V2	0.244	V6	0.217	D4	0.220	V3	0.218	D8	0.202
V6	0.242	Ha	0.210	V3	0.220	D4	0.217	V6	0.197
V5	0.233	V2	0.188	D8	0.214	D8	0.215	V5	0.197
V3	0.231	D8	0.180	V5	0.213	CDF	0.210	S8	0.193
D8	0.231	CDF	0.176	CDF	0.210	V5	0.201	S12	0.190
CDF	0.214	C18	0.175	Ha	0.198	An	0.185	C18	0.179
An	0.209	D4	0.172	An	0.189	C18	0.184	Od	0.178
LG	0.203	S10	0.165	S8	0.187	S8	0.184	An	0.172
S8	0.201	S8	0.164	C18	0.185	Ha	0.178	LG	0.158
C18	0.199	V4	0.155	Od	0.174	Od	0.175	CDF	0.157
Od	0.189	An	0.153	LG	0.164	LG	0.172	Ha	0.153
S10	0.183	LG	0.150	S10	0.163	S10	0.168	D6	0.150
V4	0.177	Od	0.146	V4	0.155	V4	0.160	S10	0.141
D6	0.173	D6	0.138	D6	0.148	D6	0.144	V4	0.119

Tabela 5.6: Separowalność znaku wodnego osadzonego na trzecim poziomie DWT w obrazku A2 (obraz naturalny). Czcionką zwykłą oznaczono falki ortogonalne znane z literatury, kursywą oznaczono falki biortogonalne znane z literatury, czcionką pogrubioną oznaczono zsyntezowane falki ortogonalne.

bez ataku		kompresja JPEG		filtracja medianowa		filtracja dolnoprzepust.		skalowanie	
A6	0.358	A6	0.338	A6	0.345	A6	0.345	A6	0.338
A20	0.356	A12	0.317	A20	0.324	A20	0.328	A20	0.321
A4	0.326	A4	0.316	A4	0.315	A12	0.316	A8	0.312
A8	0.324	A8	0.315	A8	0.313	A8	0.316	A12	0.308
A12	0.324	A20	0.314	A12	0.310	A4	0.310	A4	0.308
D8	0.312	D8	0.310	D8	0.304	D8	0.306	D8	0.304
<i>LG</i>	0.302	<i>CDF</i>	0.291	<i>LG</i>	0.289	<i>LG</i>	0.291	<i>CDF</i>	0.287
<i>CDF</i>	0.293	<i>LG</i>	0.288	<i>CDF</i>	0.287	<i>CDF</i>	0.287	<i>LG</i>	0.275
S12	0.283	S12	0.281	S12	0.275	S12	0.280	C12	0.272
<i>V5</i>	0.280	<i>V5</i>	0.280	<i>V3</i>	0.271	<i>V3</i>	0.275	<i>V5</i>	0.268
<i>V4</i>	0.277	<i>V3</i>	0.275	<i>V5</i>	0.267	<i>V5</i>	0.269	S8	0.264
<i>V3</i>	0.277	C12	0.270	C12	0.265	S8	0.264	<i>V3</i>	0.262
C12	0.272	S8	0.264	<i>V4</i>	0.262	<i>V4</i>	0.262	S12	0.259
S8	0.270	<i>V4</i>	0.264	S8	0.260	C12	0.260	<i>V2</i>	0.246
<i>V2</i>	0.259	<i>V2</i>	0.258	<i>V2</i>	0.254	<i>V2</i>	0.255	<i>V4</i>	0.240
Ha	0.257	Ha	0.257	D6	0.241	D4	0.242	D6	0.237
D4	0.253	<i>An</i>	0.246	D4	0.238	C6	0.239	C6	0.235
C6	0.251	D6	0.245	<i>An</i>	0.237	D6	0.238	D4	0.227
D6	0.248	D4	0.244	C6	0.234	<i>An</i>	0.236	<i>Od</i>	0.222
<i>An</i>	0.248	<i>Od</i>	0.239	<i>Od</i>	0.233	<i>Od</i>	0.234	S10	0.219
<i>Od</i>	0.239	S10	0.236	S10	0.228	S10	0.228	Ha	0.214
S10	0.238	C6	0.233	Ha	0.223	<i>V6</i>	0.215	<i>An</i>	0.214
<i>V6</i>	0.220	<i>V6</i>	0.214	<i>V6</i>	0.210	Ha	0.215	<i>V6</i>	0.209
C18	0.204	C18	0.201	C18	0.198	C18	0.201	C18	0.193

Tabela 5.7: Separowalność znaku wodnego osadzonego na czwartym poziomie DWT w obrazku A2 (obraz naturalny). Czcionką zwykłą oznaczono falki ortogonalne znane z literatury, kursywą oznaczono falki biortogonalne znane z literatury, czcionką pogrubioną oznaczono zsyntezowane falki ortogonalne.

bez ataku		kompresja JPEG		filtracja medianowa		filtracja dolnoprzepust.		skalowanie	
A6	0.328	A6	0.296	A6	0.300	A6	0.278	A6	0.263
A20	0.291	A20	0.246	A20	0.237	A8	0.237	A20	0.229
A4	0.255	A8	0.225	A8	0.234	A4	0.230	A8	0.223
A8	0.249	A12	0.222	A4	0.229	A12	0.229	A12	0.220
A12	0.233	A4	0.221	A12	0.222	A20	0.228	A4	0.215
S12	0.205	S12	0.191	S12	0.193	S12	0.201	S12	0.204
<i>CDF</i>	0.192	<i>CDF</i>	0.158	<i>CDF</i>	0.181	<i>CDF</i>	0.193	C12	0.176
C12	0.168	C12	0.156	C12	0.158	C12	0.166	<i>CDF</i>	0.175
Ha	0.162	V5	0.149	D6	0.146	D6	0.152	D6	0.154
D6	0.157	D6	0.134	V5	0.137	V5	0.137	V3	0.128
V5	0.152	Ha	0.131	Ha	0.127	V3	0.128	S10	0.125
V3	0.121	V3	0.131	V3	0.119	S10	0.112	V5	0.122
S10	0.121	S10	0.098	S10	0.105	V2	0.105	Ha	0.116
D4	0.105	S8	0.086	V2	0.095	Ha	0.102	C18	0.105
S8	0.105	C18	0.083	S8	0.088	S8	0.101	V4	0.098
V2	0.101	V2	0.073	C18	0.088	C18	0.095	D4	0.096
C18	0.096	C6	0.064	D4	0.085	D4	0.084	<i>LG</i>	0.093
<i>LG</i>	0.081	<i>LG</i>	0.060	<i>LG</i>	0.068	<i>LG</i>	0.081	V2	0.081
C6	0.081	V4	0.051	V4	0.064	V4	0.074	S8	0.078
V4	0.079	D4	0.049	C6	0.060	C6	0.070	C6	0.055
<i>An</i>	0.042	V6	0.027	<i>Od</i>	0.035	<i>Od</i>	0.044	<i>Od</i>	0.041
<i>Od</i>	0.041	<i>An</i>	0.019	V6	0.026	V6	0.038	<i>An</i>	0.040
V6	0.035	<i>Od</i>	0.018	<i>An</i>	0.022	<i>An</i>	0.030	V6	0.037
D8	0.003	D8	−0.005	D8	−0.014	D8	0.000	D8	0.000

Tabela 5.8: Separowalność znaku wodnego osadzonego na trzecim poziomie DWT w obrazku C3 (tekstura). Czcionką zwykłą oznaczono falki ortogonalne znane z literatury, kursywą oznaczono falki biortogonalne znane z literatury, czcionką pogrubioną oznaczono zsyntezowane falki ortogonalne.

bez ataku		kompresja JPEG		filtracja medianowa		filtracja dolnoprzepust.		skalowanie	
A4	0.399	A6	0.345	A4	0.350	A4	0.359	A4	0.345
A12	0.364	A20	0.337	A6	0.328	A6	0.344	A6	0.337
A8	0.356	A4	0.334	A12	0.314	A20	0.332	A20	0.327
A6	0.350	A8	0.326	A8	0.313	A8	0.325	A12	0.318
A20	0.339	A12	0.317	A20	0.313	A12	0.322	A8	0.308
Ha	0.314	Ha	0.314	S12	0.297	S12	0.312	S8	0.306
S12	0.314	S12	0.313	S8	0.293	S8	0.309	S12	0.299
S8	0.311	S8	0.308	<i>V2</i>	0.277	C12	0.291	<i>V2</i>	0.284
C6	0.297	C12	0.293	C12	0.276	<i>V2</i>	0.290	C12	0.282
C12	0.295	<i>V2</i>	0.292	C6	0.270	C6	0.284	C6	0.281
<i>V2</i>	0.293	D8	0.283	Ha	0.266	<i>V5</i>	0.277	Ha	0.269
D8	0.285	<i>V5</i>	0.283	S10	0.259	D8	0.277	S10	0.268
<i>V5</i>	0.283	C6	0.277	<i>V5</i>	0.257	S10	0.276	<i>V5</i>	0.267
S10	0.282	S10	0.277	D8	0.257	Ha	0.274	<i>An</i>	0.263
D4	0.279	D4	0.270	D4	0.256	<i>LG</i>	0.270	D8	0.261
<i>An</i>	0.271	<i>An</i>	0.269	<i>LG</i>	0.252	D4	0.269	D4	0.255
<i>LG</i>	0.267	<i>LG</i>	0.266	<i>An</i>	0.251	<i>An</i>	0.262	<i>LG</i>	0.247
<i>Od</i>	0.253	<i>Od</i>	0.252	<i>Od</i>	0.234	<i>Od</i>	0.248	<i>Od</i>	0.239
D6	0.243	<i>V6</i>	0.242	<i>V4</i>	0.223	<i>V4</i>	0.240	D6	0.235
<i>V4</i>	0.242	D6	0.238	<i>V6</i>	0.223	<i>V6</i>	0.238	<i>V6</i>	0.233
<i>V6</i>	0.239	<i>V4</i>	0.234	D6	0.215	D6	0.237	<i>V4</i>	0.227
<i>CDF</i>	0.226	<i>CDF</i>	0.229	<i>CDF</i>	0.209	<i>CDF</i>	0.224	<i>CDF</i>	0.223
<i>V3</i>	0.218	<i>V3</i>	0.220	<i>V3</i>	0.195	<i>V3</i>	0.218	<i>V3</i>	0.204
C18	0.206	C18	0.204	C18	0.182	C18	0.203	C18	0.193

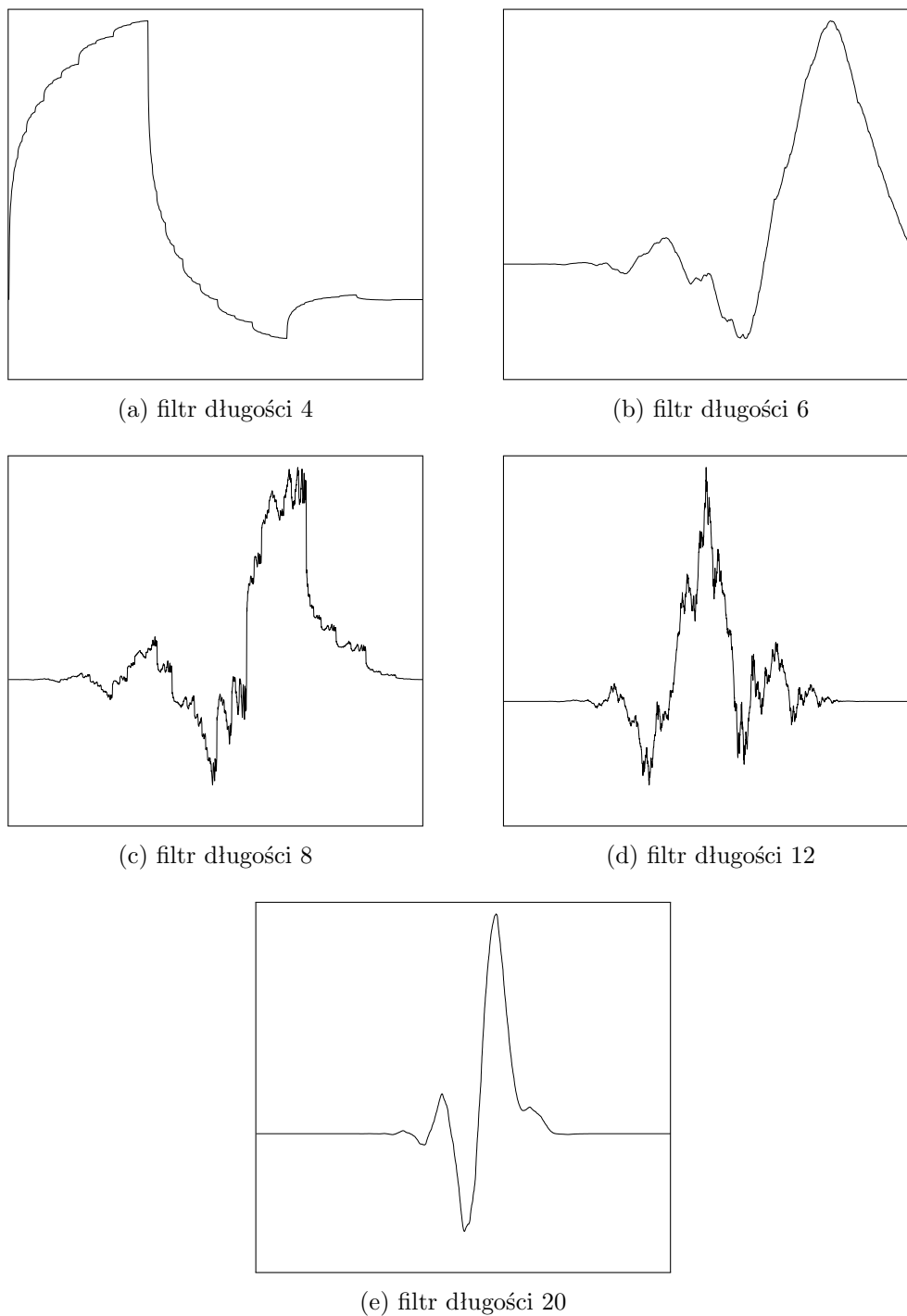
Tabela 5.9: Separowalność znaku wodnego osadzonego na czwartym poziomie DWT w obrazku C3 (tekstura). Czcionką zwykłą oznaczono falki ortogonalne znane z literatury, kursywą oznaczono falki biortogonalne znane z literatury, czcionką pogrubioną oznaczono zsyntezowane falki ortogonalne.

bez ataku		kompresja JPEG		filtracja medianowa		filtracja dolnoprzepust.		skalowanie	
A4	0.717	A8	0.623	A4	0.679	A4	0.653	A6	0.517
A20	0.699	A4	0.575	A6	0.642	A12	0.619	A12	0.492
A8	0.685	A6	0.568	A20	0.635	A6	0.614	A4	0.492
A6	0.663	A12	0.547	A8	0.634	A20	0.607	A8	0.490
A12	0.649	A20	0.546	A12	0.620	A8	0.605	A20	0.439
C6	0.603	C6	0.539	C6	0.577	C6	0.552	C6	0.418
<i>V4</i>	0.532	<i>V4</i>	0.408	<i>V4</i>	0.508	<i>V4</i>	0.510	<i>V4</i>	0.362
<i>LG</i>	0.516	<i>An</i>	0.405	<i>LG</i>	0.493	<i>LG</i>	0.496	<i>CDF</i>	0.359
<i>An</i>	0.490	<i>LG</i>	0.398	<i>An</i>	0.457	<i>An</i>	0.470	<i>LG</i>	0.346
<i>CDF</i>	0.413	C12	0.327	<i>CDF</i>	0.395	<i>CDF</i>	0.404	<i>Od</i>	0.345
C12	0.384	<i>CDF</i>	0.317	C12	0.358	C12	0.363	<i>An</i>	0.344
<i>Od</i>	0.341	<i>Od</i>	0.287	<i>Od</i>	0.323	<i>Od</i>	0.340	C12	0.321
<i>V6</i>	0.328	<i>V6</i>	0.239	<i>V6</i>	0.306	<i>V6</i>	0.324	<i>V6</i>	0.263
D6	0.267	D6	0.226	D6	0.241	D6	0.252	D6	0.235
<i>V2</i>	0.248	C18	0.213	<i>V2</i>	0.231	<i>V2</i>	0.245	<i>V2</i>	0.228
C18	0.239	<i>V2</i>	0.195	C18	0.219	C18	0.217	C18	0.199
D4	0.229	S8	0.147	D4	0.195	D4	0.192	D4	0.195
S8	0.173	D4	0.143	S8	0.153	S8	0.167	S8	0.157
S10	0.122	S10	0.100	S10	0.108	S10	0.110	S12	0.147
S12	0.122	S12	0.096	S12	0.103	S12	0.105	S10	0.103
Ha	0.093	Ha	0.075	Ha	0.069	D8	0.068	D8	0.081
D8	0.080	<i>V5</i>	0.073	<i>V5</i>	0.067	<i>V5</i>	0.065	Ha	0.053
<i>V5</i>	0.074	<i>V3</i>	0.055	D8	0.064	<i>V3</i>	0.056	<i>V3</i>	0.049
<i>V3</i>	0.056	D8	0.051	<i>V3</i>	0.045	Ha	0.050	<i>V5</i>	0.039

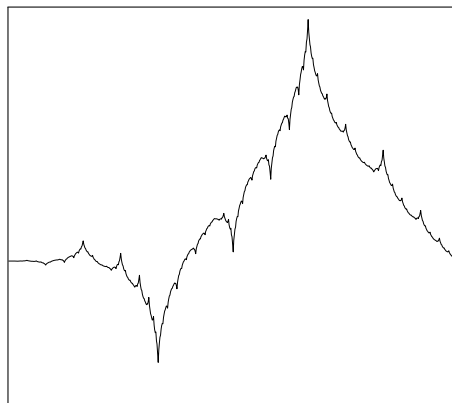
Tabela 5.10: Separowalność znaku wodnego osadzonego na trzecim poziomie DWT w obrazku D4 (tekstura). Czcionką zwykłą oznaczono falki ortogonalne znane z literatury, kursywą oznaczono falki biortogonalne znane z literatury, czcionką pogrubioną oznaczono zsyntezowane falki ortogonalne.

bez ataku		kompresja JPEG		filtracja medianowa		filtracja dolnoprzepust.		skalowanie
A4	0.234	A4	0.200	A4	0.209	A4	0.208	A6 0.202
A6	0.204	A6	0.195	A6	0.189	A6	0.196	A4 0.196
A20	0.194	A8	0.182	A8	0.175	A8	0.180	A8 0.179
A8	0.184	A12	0.175	A20	0.169	A20	0.177	A20 0.179
A12	0.179	A20	0.173	A12	0.168	A12	0.170	A12 0.162
<i>LG</i>	0.166	S10	0.164	S10	0.159	S10	0.167	S10 0.147
S10	0.165	<i>LG</i>	0.158	<i>LG</i>	0.157	<i>LG</i>	0.160	<i>V4</i> 0.140
<i>V4</i>	0.156	<i>CDF</i>	0.156	<i>V4</i>	0.146	<i>V4</i>	0.155	<i>LG</i> 0.138
<i>CDF</i>	0.155	<i>V3</i>	0.150	<i>CDF</i>	0.145	<i>CDF</i>	0.153	<i>CDF</i> 0.136
<i>V3</i>	0.151	<i>V4</i>	0.148	<i>V3</i>	0.144	<i>V3</i>	0.151	<i>V3</i> 0.135
D8	0.146	D8	0.144	D8	0.136	D8	0.141	<i>V6</i> 0.126
<i>V6</i>	0.134	<i>V6</i>	0.132	<i>V6</i>	0.124	<i>V6</i>	0.135	D8 0.114
D4	0.123	C12	0.118	C12	0.112	C12	0.121	D4 0.113
C6	0.121	D4	0.117	D4	0.110	<i>Od</i>	0.113	C18 0.113
C12	0.119	<i>Od</i>	0.113	C6	0.107	C6	0.113	C12 0.109
<i>Od</i>	0.113	<i>An</i>	0.109	<i>Od</i>	0.106	D4	0.113	<i>Od</i> 0.107
<i>An</i>	0.110	C6	0.109	<i>An</i>	0.102	<i>An</i>	0.110	C6 0.105
C18	0.102	C18	0.100	C18	0.097	C18	0.103	<i>An</i> 0.096
Ha	0.093	Ha	0.093	D6	0.070	D6	0.077	D6 0.082
D6	0.080	D6	0.077	Ha	0.066	Ha	0.069	S12 0.073
S12	0.070	S12	0.069	S12	0.062	S12	0.067	<i>V2</i> 0.058
S8	0.057	<i>V2</i>	0.057	<i>V2</i>	0.050	<i>V2</i>	0.060	Ha 0.057
<i>V2</i>	0.056	S8	0.052	S8	0.048	S8	0.056	S8 0.047
<i>V5</i>	0.031	<i>V5</i>	0.031	<i>V5</i>	0.020	<i>V5</i>	0.024	<i>V5</i> 0.031

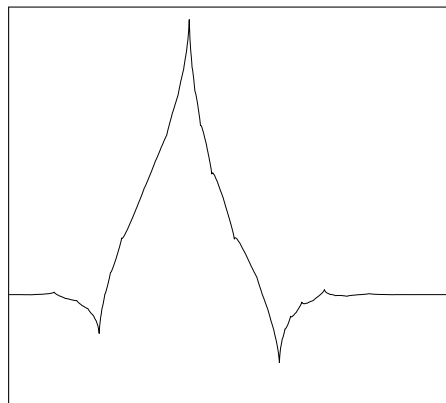
Tabela 5.11: Separowalność znaku wodnego osadzonego na czwartym poziomie DWT w obrazku D4 (tekstura). Czcionką zwykłą oznaczono falki ortogonalne znane z literatury, kursywą oznaczono falki biortogonalne znane z literatury, czcionką pogrubioną oznaczono zsyntezowane falki ortogonalne.



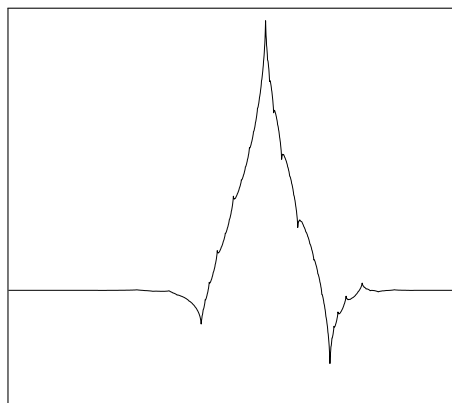
Rysunek 5.7: Funkcje skalujące filtrów zsyntezowanych dla obrazka A2 przy osadzaniu znaku wodnego na trzecim poziomie DWT.



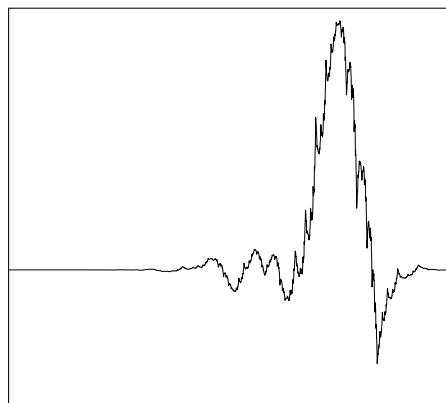
(a) filtr długości 4



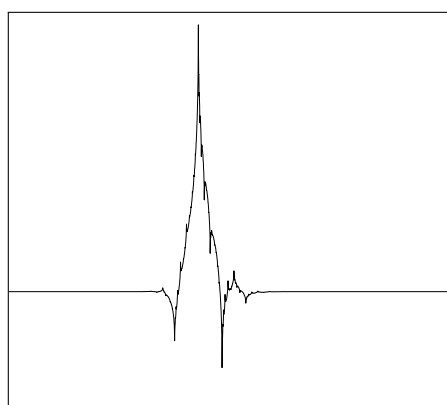
(b) filtr długości 6



(c) filtr długości 8

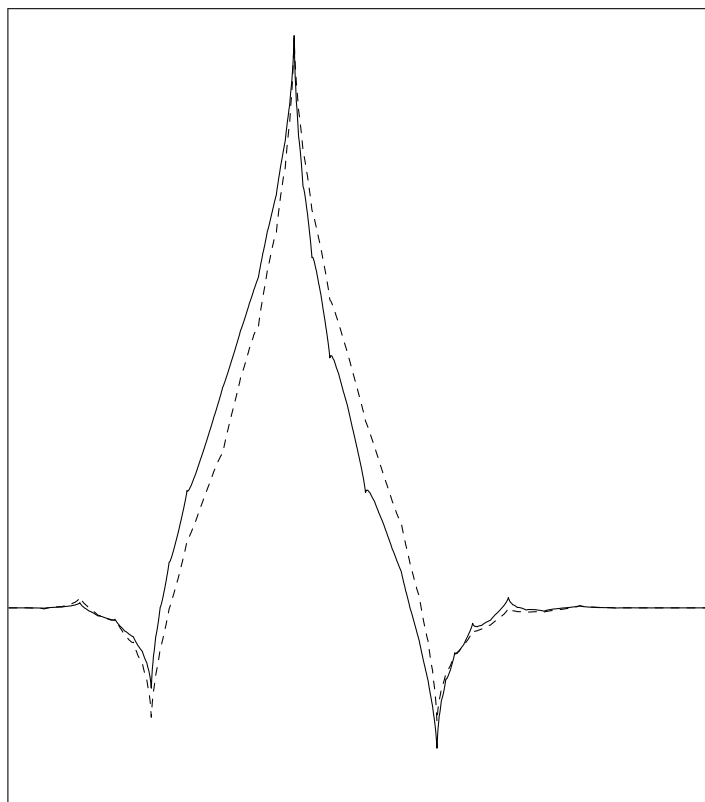


(d) filtr długości 12



(e) filtr długości 20

Rysunek 5.8: Funkcje skalujące filtrów zsyntezowanych dla obrazka D4 przy osadzaniu znaku wodnego na trzecim poziomie DWT.



Rysunek 5.9: Porównanie adaptacyjnej funkcji bazowej z Rysunku 5.8b (linia ciągłą) z funkcją skalującą Coiflet 6 (linia przerywana).

Eksperyment 5

Cel : Udowodnienie słuszności drugiej tezy niniejszej rozprawy doktorskiej poprzez wykazanie, że zmiana sygnału na inny albo modyfikacja algorytmu przetwarzania sygnału powodują znaczący spadek skuteczności działania zsyntezowanych falek adaptacyjnych w zadaniu osadzania cyfrowych znaków wodnych.

Metoda : Falki adaptacyjne zsyntezowane w ramach poprzedniego eksperymentu zostały użyte, do osadzenia znaku wodnego: a) w innym obrazku niż ten dla którego je syntezyowano oraz b) w tym samym obrazku dla którego je zsyntezowano, ale z użyciem innej liczby poziomów analizy sygnału. W tym drugim przypadku zmieniono tylko ilość poziomów analizy sygnału oraz wymagany poziom jakości obrazu. Znak wodny pozostawiono bez zmian (inaczej niż we wcześniejszym eksperymencie), co miało na celu wykazanie, że zmiana algorytmu przetwarzania sygnału, bez zmiany danych wejściowych, również ma wpływ na skuteczność falki.

bez ataku		kompresja JPEG		filtracja medianowa		filtracja dolnoprzepust.		skalowanie	
C6	0.273	C12	0.230	C6	0.242	S12	0.242	C6	0.238
D4	0.265	V3	0.226	S12	0.241	C6	0.241	S12	0.230
S12	0.259	S12	0.224	C12	0.237	C12	0.238	C12	0.230
Ha	0.251	C6	0.224	V2	0.231	V6	0.235	V2	0.221
C12	0.250	V5	0.217	V6	0.226	V2	0.230	D4	0.217
A4	0.245	V6	0.217	D4	0.220	V3	0.218	V6	0.217
V2	0.244	Ha	0.210	V3	0.220	D4	0.217	V3	0.216
V6	0.242	A20	0.194	A20	0.219	D8	0.215	D8	0.204
A20	0.242	V2	0.188	D8	0.214	A20	0.212	V5	0.201
V5	0.233	D8	0.180	V5	0.213	<i>CDF</i>	0.210	A20	0.197
V3	0.231	A12	0.178	<i>CDF</i>	0.210	V5	0.201	<i>CDF</i>	0.192
D8	0.231	<i>CDF</i>	0.176	A4	0.199	A4	0.198	A12	0.189
A8	0.214	C18	0.175	Ha	0.198	A12	0.190	C18	0.186
<i>CDF</i>	0.214	A4	0.175	A12	0.190	<i>An</i>	0.185	A4	0.182
<i>An</i>	0.209	D4	0.172	<i>An</i>	0.189	C18	0.184	S8	0.181
A12	0.208	S10	0.165	S8	0.187	S8	0.184	<i>An</i>	0.180
<i>LG</i>	0.203	S8	0.164	C18	0.185	A8	0.180	<i>Od</i>	0.173
S8	0.201	A8	0.158	A8	0.178	Ha	0.178	<i>LG</i>	0.171
C18	0.199	V4	0.155	<i>Od</i>	0.174	<i>Od</i>	0.175	Ha	0.166
<i>Od</i>	0.189	<i>An</i>	0.153	<i>LG</i>	0.164	<i>LG</i>	0.172	A8	0.165
A6	0.183	<i>LG</i>	0.150	S10	0.163	S10	0.168	S10	0.153
S10	0.183	<i>Od</i>	0.146	A6	0.155	V4	0.160	V4	0.149
V4	0.177	D6	0.138	V4	0.155	D6	0.144	D6	0.146
D6	0.173	A6	0.122	D6	0.148	A6	0.143	A6	0.133

Tabela 5.12: Separowalność znaku wodnego osadzonego na trzecim poziomie DWT w obrazku A2 przy użyciu falek zszyntzowanych dla obrazka A1. Czcionką zwykłą oznaczono faleki ortogonalne znane z literatury, kursywą oznaczono faleki bior-togonalne znane z literatury, czcionką pogrubioną oznaczono zszyntezowane faleki ortogonalne.

bez ataku		kompresja JPEG		filtracja medianowa		filtracja dolnoprzepust.		skalowanie	
Ha	0.299	Ha	0.299	C12	0.282	A4	0.269	C12	0.284
<i>V4</i>	0.295	<i>V4</i>	0.299	<i>V4</i>	0.279	D4	0.265	<i>V4</i>	0.283
C12	0.293	C12	0.290	D4	0.267	<i>V4</i>	0.255	D4	0.268
A4	0.292	A4	0.278	A4	0.264	C12	0.254	A4	0.263
D4	0.284	D4	0.274	Ha	0.256	Ha	0.245	<i>CDF</i>	0.245
<i>Od</i>	0.256	<i>Od</i>	0.257	<i>Od</i>	0.248	<i>CDF</i>	0.234	Ha	0.242
<i>CDF</i>	0.255	<i>CDF</i>	0.253	<i>CDF</i>	0.246	<i>Od</i>	0.227	<i>Od</i>	0.242
S12	0.243	S12	0.242	S12	0.235	S12	0.223	S12	0.242
A8	0.238	<i>V2</i>	0.231	<i>V2</i>	0.227	<i>V3</i>	0.218	<i>V2</i>	0.232
<i>V2</i>	0.233	<i>V3</i>	0.227	A8	0.222	S10	0.216	<i>V3</i>	0.224
<i>V3</i>	0.228	<i>V6</i>	0.226	<i>V3</i>	0.218	<i>V6</i>	0.212	<i>V6</i>	0.218
S10	0.227	<i>V5</i>	0.225	S10	0.214	A8	0.210	A8	0.218
<i>V6</i>	0.227	S10	0.225	<i>V6</i>	0.214	<i>V2</i>	0.209	S10	0.215
<i>V5</i>	0.225	A8	0.224	A12	0.211	<i>V5</i>	0.204	<i>LG</i>	0.214
S8	0.222	S8	0.217	S8	0.210	<i>An</i>	0.203	<i>V5</i>	0.210
<i>LG</i>	0.222	A12	0.211	<i>V5</i>	0.209	S8	0.201	S8	0.209
A12	0.220	<i>An</i>	0.211	<i>LG</i>	0.205	<i>LG</i>	0.200	C6	0.207
C6	0.217	<i>LG</i>	0.208	A20	0.203	C6	0.198	<i>An</i>	0.205
A20	0.214	C6	0.200	<i>An</i>	0.201	A20	0.195	A12	0.201
<i>An</i>	0.212	A20	0.200	C6	0.196	A12	0.191	A20	0.199
A6	0.202	D6	0.196	D6	0.191	D6	0.184	D6	0.187
D6	0.199	A6	0.186	A6	0.183	C18	0.176	A6	0.178
C18	0.173	C18	0.169	C18	0.162	A6	0.173	D8	0.160
D8	0.169	D8	0.167	D8	0.158	D8	0.149	C18	0.156

Tabela 5.13: Separowalność znaku wodnego osadzonego na czwartym poziomie DWT w obrazku A1 przy użyciu falek zsynchronizowanych dla trzech poziomów DWT. Czcionką zwykłą oznaczono falki ortogonalne znane z literatury, kursywą oznaczono falki biortogonalne znane z literatury, czcionką pogrubioną oznaczono zsynchronizowane falki ortogonalne.

Analiza wyników : Przykładowe wyniki eksperymentu pokazane zostały w Tabelach 5.12 i 5.13. Tabela 5.12 przedstawia wynik osadzania znaku wodnego na trzecim poziomie DWT w obrazie A2, przy użyciu falek zszyntezowanych dla obrazka A1 (również dla osadzania na trzecim poziomie DWT). Tabela 5.13 pokazuje wynik osadzania znaku wodnego w obrazie A1 na czwartym poziomie DWT, przy użyciu falek zszyntezowanych do osadzania znaku na trzecim poziomie DWT. W obu przypadkach można zaobserwować znaczący spadek separowalności oferowanej przez falki adaptacyjne. W szczególności falka **A6**, która oferowała największą separowalność (Tabela 5.4 na stronie 131) spadła na dół rankingu i okazała się jedną z najgorszych falek. Pokazuje to, że zszyntezowane falki zaadaptowały się do charakterystyki przetwarzanego sygnału oraz algorytmu jego przetwarzania. Zmiana któregośkolwiek z tych elementów prowadzi do znaczącego pogorszenia wyników.

5.3 Szybkość i skuteczność zastosowanego algorytmu ewolucyjnego

W ramach prowadzonych badań dla każdego z dwudziestu obrazków testowych zszyntezowanych było pięć filtrów. Eksperymenty powtórzono osadzając znak na trzecim lub czwartym poziomie DWT, dla dwóch różnych zestawów ataków. Daje to łącznie 400 eksperymentów syntezy falek. Ta liczba pozwala na orientacyjne oszacowanie skuteczności wykorzystanego algorytmu optymalizacji. Zaobserwowano, że algorytm ewolucyjny był w stanie skutecznie zszyntezować wybraną falkę w 61.5% przypadków. W razie niepowodzenia, a więc sytuacji kiedy przynajmniej jedna falka nieadaptacyjna okazywała się lepsza od falki adaptacyjnej, synteza była powtarzana. Jeśli skuteczność algorytmu ewolucyjnego wynosiła 61.5%, to można oczekiwać, że powtórzenie obliczeń dla pozostałych obrazków pozwoli skutecznie zszyntezować falki dla $(100 - 61.5) \cdot 0.615 \approx 23.6\%$ przypadków. Zaobserwowano, że po powtórzeniu algorytmu ewolucyjnego od początku udawało się poprawnie zszyntezować falki adaptacyjne jedynie w 10% przypadków, co nie jest wynikiem zgodnym z oczekiwaniami. Może to sugerować, że dla niektórych kombinacji obrazka, ilości poziomów DWT i znaku wodnego, zszyntezowanie falki adaptacyjnej może być trudniejsze. Ostatecznie, po pięciu powtórzeniach algorytmu ewolucyjnego skuteczność dla tekstur wynosiła 98.5%, a dla obrazów naturalnych 89.5%.

Zaobserwowano, że w sytuacjach kiedy nie udawało się zsyntezować lepszej falki adaptacyjnej, najczęściej jedna z falek nieadaptacyjnych okazywała się lepsza pod względem niektórych ataków (często była to falka *V3* albo *CDF*).

W trakcie eksperymentów zbadano także czas syntezy falki. Eksperymenty przeprowadzono w systemie openSUSE Linux na komputerze z procesorem Intel Core i7 M620, wyposażonym w cztery rdzenie o prędkości 2.67GHz każdy. Celem tego badania było ustalenie czasu syntezy falki, w celu ustalenia skuteczności użytego algorytmu optymalizacji pod kątem ewentualnej implementacji w aplikacji użytkowej. Zbadany czas syntezy filtru o długości 8, przy parametrach algorytmu ewolucyjnego jak w Tabeli 5.1, wyniósł średnio ok. 1300 sekund, czyli ok. 21 minut. Głównym czynnikiem wpływającym na czasochłonność obliczeń jest dobór siły osadzenia przy użyciu funkcji `fmincon`, dostępnej w środowisku Matlab, w celu zagwarantowania stałego poziomu zniekształcenia obrazu. Zastosowanie stałej siły osadzenia skraca czas obliczeń średnio do 117 sekund. Na podstawie powyższej analizy widać, że należy zastosować szybszy i skuteczniejszy algorytm optymalizacji, jeśli zaproponowana metoda miałaby zostać w przyszłości wdrożona w rozwiązaniu przemysłowym.

5.4 Podsumowanie i wnioski

W rozdziale zademonstrowano wyniki eksperymentów przeprowadzonych w celu praktycznej weryfikacji zaproponowanego podejścia do syntezy falek. Zbadano szczegółowo dziedzinę postawionego problemu. Pokazano, że skonstruowana funkcja celu jest silnie multimodalna, co uzasadnia zastosowanie algorytmów ewolucyjnych jako metody globalnego przeszukiwania jej wartości. Wyznaczono również zestaw ataków usuwających, najbardziej uszkadzających osadzony znak wodny. Następnie pokazano, że synteza falek na podstawie oceny przetworzonego sygnału pozwala na uzyskanie falek oferujących lepszą separowalność znaków wodnych po przeprowadzeniu ataków, niż falki zaproponowane do tej pory w literaturze. Pokazano również, że wykorzystanie falki do przetwarzania innego sygnału, niż ten dla którego została zsyntezowana, prowadzi do znaczącego pogorszenia wyników. Oznacza to, że syntezowane falki adaptują się do charakterystyki przetwarzanego sygnału. Tym samym uzyskane rezultaty pozwalają na potwierdzenie obu tez postawionych we wstępie niniejszej rozprawy doktorskiej. W rozdziale wskazano rów-

nież, że użyta metoda przeszukiwania funkcji celu powinna zostać usprawniona, jeśli zaproponowany algorytm miałby zostać wdrożony w rozwiązaniu przemysłowym.

Rozdział 6

Podsumowanie i wnioski

W ramach niniejszej rozprawy doktorskiej zaproponowano nową metodę syntezy funkcji bazowych dyskretnego przekształcenia falkowego. Pozwala ona na synteze falek pod kątem wieloetapowych i nieciągłych algorytmów przetwarzania sygnałów, na co nie pozwalały metody syntezy falek proponowane do tej pory w literaturze. Ideą nowej metody jest przetworzenie sygnału algorytmem, dla którego ma zostać zsyntezowana falka, a następnie ocena charakterystyki przetworzonego sygnału według wybranego kryterium. Jako przykładowe zastosowanie nowej metody wybrano zadanie osadzania cyfrowych znaków wodnych w dziedzinie dyskretnego przekształcenia falkowego. Kryterium oceny syntezy falek była separowalność znaków wodnych po przeprowadzeniu na obrazie z osadzonym znakiem wodnym zestawu wybranych ataków usuwających. W ten sposób skonstruowana została pewna funkcja celu, której maksimum globalne było poszukiwane przy użyciu algorytmu ewolucyjnego. Jako metodę parametryzacji falek, pozwalającą na utworzenie przestrzeni poszukiwań, wybrano ortogonalną strukturę kratową w postaci zaproponowanej przez Jacymirskiego. W Rozdziale 3 przeprowadzony został autorski dowód wykazujący zgodność tej parametryzacji z istniejącą teorią falek. W celu zweryfikowania skuteczności zaproponowanej metody, opisane algorytmy zostały zaimplementowane w środowisku Matlab. Rozdział 5 zawiera wyniki przeprowadzonych eksperymentów. Wykazały one, że stosując zaproponowane podejście możliwe jest zsyntezowanie falek oferujących lepszą skuteczność, względem wybranego kryterium, niż falki zaproponowane do tej pory w literaturze. Pokazano ponadto, że synteza falki dla jednego sygnału, a następnie wykorzystanie jej do przetwarzania innego sygnału prowadzi do uzyskania złych wyników. Prowadzi to

do wniosku, że falki adaptują się nie tylko do algorytmu przetwarzania, ale również do charakterystyki przetwarzanego sygnału. Tym samym wykazana została prawdziwość obu tez sformułowanych we wstępie pracy:

Teza 1 : Zastosowanie oceny przetworzonego sygnału jako kryterium optymalności pozwala na syntezę falek skuteczniejszych w wybranym zastosowaniu przetwarzania sygnału, niż falki zaproponowane do tej pory w literaturze.

Teza 2 : Falki zsyntezowane na podstawie oceny przetworzonego sygnału adaptują się do charakterystyki sygnału wejściowego.

W ramach pracy wskazano również dwa ograniczenia proponowanego podejścia. Po pierwsze jego skuteczność jest silnie uzależniona od zastosowanego algorytmu poszukiwania maksimum. Jeśli algorytm jest nieskuteczny, nie będzie możliwe wyznaczenie optymalnych filtrów. Po drugie, skuteczność algorytmu zależy od możliwości sformułowania obiektywnego kryterium oceny przetworzonego sygnału.

W trakcie prac badawczych autor zetknął się z licznymi koncepcjami i metodami powiązanymi z tematyką niniejszej rozprawy doktorskiej. Zgłębienie wszystkich napotkanych wątków nie było możliwe w ramach bieżącej pracy, jednak mogą one wyznaczać zakres tematyki przyszłych badań w dziedzinie szeroko rozumianej adaptacji falek oraz cyfrowych znaków wodnych. Zreferujemy pokrótce te tematy:

- W roku 2000 ogłoszono nową wersję najpopularniejszego standardu kompresji obrazów JPEG, oznaczoną jako JPEG2000 [3]. W przeciwieństwie do standardu JPEG, opartego o transformatę kosinusową (DCT), w kompresji stratnej JPEG2000 stosowana jest transformata falkowa oparta o system falek biortogonalnych Cohen-Daubechies-Feauveau 9/7 [18]. Oparcie standardu kompresji o transformatę falkową otwiera możliwość integracji systemu osadzania znaku wodnego w dziedzinie DWT ze standardem kompresji JPEG2000. Potencjalnie pozwala to na adaptację falek stosowanych w kompresji JPEG2000 pod kątem osadzania znaku wodnego jak i samej kompresji obrazu. Wymaga to opracowania nowej postaci struktury kratowej, pozwalającej na parametryzację falek biortogonalnych, albo zastosowania znanego z literatury schematu obliczeniowego lifting scheme, który jest w stanie realizować przekształcenia biortogonalne.

- Kluczowe znaczenie dla praktycznego zastosowania wyników niniejszej rozprawy ma skuteczność i szybkość działania algorytmu ewolucyjnego. W celu przyspieszenia zaproponowanych algorytmów można rozważyć ich implementację na procesorach graficznych, np. przy wykorzystaniu technologii NVidia CUDA. Procesory te są przystosowane do równoległego przetwarzania dużych ilości danych, które należy poddać identycznym operacjom arytmetycznym. Nie nadają się przy tym do implementacji kodu opartego o instrukcje warunkowe. Zaproponowana struktura kratowa doskonale spełnia te kryteria. Powszechna dostępność kart graficznych NVidia na rynku komputerów osobistych sprawia, że jest to obiecujący kierunek dalszych badań nad szybką implementacją zaproponowanych algorytmów, tym bardziej, że teoretycznie istnieje możliwość aż kilkudziesięciokrotnego przyspieszenia obliczeń numerycznych. Ponadto zastosowany algorytm ewolucyjny może zostać rozbudowany o metaalgorytmy dobierające parametry algorytmu w trakcie jego pracy. Można również rozważyć wykorzystanie innych, znanych z literatury, stochastycznych metod globalnego przeszukiwania funkcji celu, np. metody symulowanego wyżarzania albo optymalizacji rojem cząstek (ang. *Particle Swarm Optimization*).
- Zademonstrowany sposób poprawy skuteczności osadzania cyfrowych znaków wodnych może zostać rozszerzony o adaptacyjny dobór ilości poziomów przekształcenia falkowego.
- Jak zostało podkreślone, skuteczność zaproponowanej metody adaptacji fałek na podstawie końcowego efektu przetwarzania sygnału jest uzależniona od możliwości jakościowej oceny przetworzonego sygnału. W opisywanym zagadnieniu osadzania cyfrowych znaków wodnych poprawę skuteczności działania powinno przynieść zastosowanie skuteczniejszej metody oceny jakości obrazu. Autor jest przekonany, że dysponując dużą aprioryczną wiedzą o rodzaju zniekształceń wprowadzanych do obrazu w procesie osadzania cyfrowego znaku wodnego, możliwe jest zaprojektowanie dedykowanej miary jakości obrazu wykazującej się znacznie większą skutecznością, niż zaproponowane do tej pory miary o przeznaczeniu ogólnym. Na chwilę obecną pozostaje to jednak otwartym zagadnieniem badawczym.

- W ramach niniejszej rozprawy wybrano zastosowanie sygnału, w którym falka adaptuje się do konkretnego sygnału. Istnieją jednak inne zastosowania, np. klasyfikacja, w których konieczna może być adaptacja falki do całej klasy sygnałów. W ramach dalszych badań należy zbadać skuteczność zaproponowanej metody syntezy falek w zadaniach tego typu.

Bibliografia

- [1] USC-SIPI Image Database. <http://sipi.usc.edu/database/>.
- [2] Certimark. <http://www.certimark.org/>, 2002.
- [3] JPEG 2000 comitee drafts: core coding system. <http://www.jpeg.org/jpeg2000/>, 2004.
- [4] S.H. Amiri, M. Jamzad. A robust image watermarking method in wavelet domain using genetic algorithm. *International Conference on Availability, Reliability and Security, 2009. ARES '09.*, strony 612–617, Marzec 2009.
- [5] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, I. Daubechies. Image coding using wavelet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1:205–220, Kwiecień 1992.
- [6] M. Barni, F. Bartolini, V. Cappellini, A. Lippi, A. Piva. A DWT-based technique for spatio-frequency masking of digital signatures. *Electonic Imaging '99*, wolumen 3657, San Jose, CA, January 1999. Proceedings of SPIE.
- [7] M. Barni, F. Bartolini, A. Piva. Improved wavelet-based watermarking through pixel-wise masking. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(5), Maj 2001.
- [8] G. Battle. A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarié functions. *Communications in Mathematical Physics*, 110(4):601–615, Grudzień 1987.
- [9] H.-G. Beyer. *The theory of evolution strategies*. Springer, 2001.
- [10] H.-G. Beyer, H.-P. Schwefel. Evolution strategies – a comprehensive introduction. *Natural Computing*, 1(1):3–52, Marzec 2002.

- [11] N. Bi, Q. Sun, D. Huang, Z. Yang, J. Huang. Robust image watermarking based on multiband wavelets and empirical mode decomposition. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18(8):1956–1966, Sierpień 2007.
- [12] J. T. Białasiewicz. *Falki i aproksymacje*. WNT, 2000.
- [13] C. S. Burrus, R. A. Gopinath, H. Guo. *Introduction to wavelets and wavelet transforms*. Prentice Hall, 1998.
- [14] L. Byczkowska-Lipińska. *Aspekty elektromagnetyczne i matematyczne teleinformatyki*. AOW EXIT, Warszawa, 2009.
- [15] A. R. Calderbank, I. Daubechies, W. Sweldens, B.-L. Yeo. Wavelet transforms that map integers to integers. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 5:332–369, 1998.
- [16] G. Cheng, J. Yang. A watermarking scheme based on two-dimensional wavelet filter parametrization. *Fifth International Conference on Information Assurance and Security, 2009. IAS '09.*, strony 301–304, Sierpień 2009.
- [17] P. L. Chu. Quadrature mirror filter design for an arbitrary number of equal bandwidth channels. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33:203–218, Luty 1985.
- [18] A. Cohen, I. Daubechies, J.-C. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 45(5):485–560, Czerwiec 1992.
- [19] T. Cooklev. An efficient architecture for orthogonal wavelet transforms. *IEEE Signal Processing Letters*, 13(2), Luty 2006.
- [20] M. Corvi, G. Nicchiotti. Wavelet-based image watermarking for copyright protection. *Scandinavian Conference on Image Analysis SCIA '97*, Czerwiec 1997.
- [21] I.J. Cox, M. L. Miller, J. A. Bloom, J. Fridrich, T. Kalker. *Digital watermarking and steganography*. Elsevier, wydanie 1nd, 2008.

-
- [22] S. Craver, N. Memon, B.-L. Yeo, M. M. Yeung. Resolving rightful ownerships with invisible watermarking techniques: Limitations, attacks, and implications. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 16(4):573–586, Maj 1998.
- [23] R. E. Crochiere, S. A. Webber, J. L. Flanagan. Digital coding of speech in subbands. *Bell System Technical Journal*, 55:1069–1085, 1976.
- [24] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41(7):909–996, 1988.
- [25] I. Daubechies. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36(5):961–1005, Wrzesień 1990.
- [26] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1992.
- [27] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets, II. variations on a theme. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 24(2):499–519, Marzec 1993.
- [28] I. Daubechies, W. Sweldens. Factoring wavelet transforms into lifting steps. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4(3):247–269, 1998.
- [29] G. Davis. Wavelet image compression construction kit. <http://www.geoffdavis.net/dartmouth/wavelet/wavelet.html>, 1997.
- [30] F. Davoine. Comparison of two wavelet based image watermarking schemes. *IEEE International Conference on Image Processing*, strony 682–685, 2000.
- [31] T. C. Denk, K. K. Parhi. Architectures for lattice structure based orthonormal discrete wavelet transforms. *International Conference on Application Specific Array Processors, 1994.*, strony 259–270, 1994.
- [32] T. C. Denk, K. K. Parhi. VLSI architectures for lattice structure based orthonormal discrete wavelet transforms. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 44(2):129–132, Luty 1997.

- [33] P. Desarte, B. Macq, D.T.M. Slock. Signal-adapted multiresolution transform for image coding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):897–904, Marzec 1992.
- [34] W. Dietl, P. Meerwald, A. Uhl. Protection of wavelet-based watermarking systems using filter parametrization. *Signal Processing*, 83(10):2095–2116, Październik 2003.
- [35] M. Dietze, S. Jassim. Filters ranking for DWT-domain robust digital watermarking. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 14:2093–2101, 2004.
- [36] J. J. Eggers, J. Su, B. Girod. A blind watermarking scheme based on structured codebooks. *IEE Seminar on Secure Images and Image Authentication*, strony 4/1–4/21, Kwiecień 2000.
- [37] D. Esteban, C. Galand. Application of quadrature mirror filters to split-band voice coding schemes. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP '77*, strony 191–195, Maj 1977.
- [38] Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski. *Metody numeryczne*. WNT, Warszawa, 2009.
- [39] C. Galand, H. J. Nussbaumer. New quadrature mirror filter structures. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 32:522–531, Czerwiec 1984.
- [40] W. Gaofeng, J. Hongxu, Y. Rui. Linear-regression model based wavelet filter evaluation for image compression. *Asia-Pacific Conference on Wearable Computing Systems (APWCS)*, strony 315–318, Kwiecień 2010.
- [41] R. A. Gopinath, J. E. Odegard, C. S. Burrus. Optimal wavelet representation of signals and the wavelet sampling theorem. *IEEE Transaction on Circuits and Systems II*, 41:262–277, Kwiecień 1994.
- [42] P. Goupillaud, A. Grossman, J. Morlet. Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis. *Geoplotation*, 23:85–102, 1984.

- [43] S. Goyal, R. Gupta. Optimization of fidelity with adaptive genetic watermarking algorithm using roulette-wheel. *2010 International Conference on Computational Intelligence and Communication Networks (CICN)*, strony 591–596, 2010.
- [44] S. Goyal, R. Gupta, A. Bansal. Application of genetic algorithm to optimize robustness and fidelity of watermarked images (a conceptual approach). *International Journal on Computer Science and Engineering*, 1(3):239–242, 2009.
- [45] B. L. Gunjal, R. R. Manthalkar. Discrete wavelet transform based strongly robust watermarking scheme for information hiding in digital images. *Emerging Trends in Engineering and Technology (ICETET), 2010 3rd International Conference on*, strony 124–129, 2011.
- [46] T. Gwiazda. *Algorytmy genetyczne: kompendium. Tom 1: Operator krzyżowania dla problemów numerycznych*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2007.
- [47] T. Gwiazda. *Algorytmy genetyczne: kompendium. Tom 2: Operator mutacji dla problemów numerycznych*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2007.
- [48] A. Haar. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Mathematical Annals*, 69:331–371, 1910.
- [49] J. H. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. MIT Press, Cambridge, wydanie 2, 1992.
- [50] C.-T. Hsu, J.-L. Wu. Multiresolution watermarking for digital images. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 45(8):1097–1101, Sierpień 1998.
- [51] L. Hu, F. Wan. Analysis on wavelet coefficient for image watermarking. *2010 International Conference on Multimedia Information Networking and Security (MINES)*, strony 630–634, 2010.

- [52] Y. Hu, S. Kwong. Wavelet domain adaptive visible watermarking. *Electronic Letters*, 37(20):1219–1220, Wrzesień 2001.
- [53] H.-C. Huang, Y.-H. Chen. Genetic fingerprinting for copyright protection of multicast media. *Soft Computing*, 13(4):163–179, 2009.
- [54] H.-C. Huang, J.-S. Pan, Y.-H. Huang, F.-H. Wang, K.-C. Huang. Progressive watermarking techniques using genetic algorithms. *Circuits Systems Signal Processing*, 26(5):671–687, 2007.
- [55] J. Huang, Y. Q. Shi. Adaptive image watermarking scheme based on visual masking. *Electronic Letters*, 34(8):748–750, Kwiecień 1998.
- [56] Z. Q. Huang, Z. Jiang. Watermarking still images using parametrized wavelet systems. *Image and Vision Computing*. Institute of Information Sciences and Technology, Massey University, 2003.
- [57] V. K. Ingle, J. G. Proakis. *Digital signal processing using Matlab V.4*. PWS Publishing Company, 1997.
- [58] M. Jacymirski, P. Szczepaniak. Neural realization of fast linear filters. Mislav Grgić, redaktor, *4th EURASIP-IEEE Region 8 International Symposium on Video/Image Processing and Multimedia Communications*, strony 153–157, 2002.
- [59] M. Jansen, P. Oonincx. *Second Generation Wavelets and Applications*. Springer, 2005.
- [60] S. Katzenbeisser, F. A. P. Petitcolas. *Information hiding techniques for steganography and digital watermarking*. Artech House, 2000.
- [61] Y.-S. Kim, O.-H. Kwon, R. H. Park. Wavelet based watermarking method for digital images using the human visual system. *Circuits and Systems, 1999. ISCAS '99. Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on*, wolumen 4, strony 80–83, Lipiec 1999.
- [62] N. Komatsu, H. Tominaga. A proposal on digital watermark in document image communication and its application to realizing a signature. *Electronics and Communications in Japan (Part I: Communications)*, 73(5):22–33, Maj 1990.

-
- [63] M.-J. Lai, D. W. Roach. Parameterizations of univariate orthogonal wavelets with short support. *Innovations in Applied Mathematics*, Approximation Theory X, strony 369–384. Vanderbilt Univ. Press, 2002.
- [64] M. Lang, P. N. Heller. The design of maximally smooth wavelets. *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, wolumen 3, strony 1463–1466, 1996.
- [65] D. Le Gall, A. Tabatabai. Sub-band coding of digital images using symmetric short kernel filters and arithmetic coding techniques. *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1988. ICASSP-88.*, 1988.
- [66] S. Lee, C. D. Yoo, T. Kalker. Reversible image watermarking based on integer-to-integer wavelet transform. *IEEE Transactions on Information Forensics And Security*, 2(3), Wrzesień 2007.
- [67] P. G. Lemarié. Ondelettes à localisation exponentielle. *J. Math. pures et appl*, 67(3):227–236, 1988.
- [68] V. Licks, R. Jordan. Geometric attacks on image watermarking systems. *IEEE Multimedia*, 12(3):68–78, 2005.
- [69] J.-M. Lina, M. Mayrand. Parametrizations for Daubechies wavelets. *Physical Review E*, 48(6):R4160–R4163, Grudzień 1993.
- [70] P. Lipiński, M. Yatsymirskyy. On synthesis of 4-tap and 6-tap reversible wavelet filters. *Przegląd Elektrotechniczny*, (12):284–286, 2008.
- [71] S. Mallat. Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37:2091–2110, Grudzień 1989.
- [72] S. Mallat. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of L_2 . *Transaction of the American Mathematical Society*, 315:69–87, Wrzesień 1989.
- [73] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, Lipiec 1989.

- [74] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, Grudzień 2008.
- [75] P. Meerwald. Digital image watermarking in the wavelet transform domain. Praca magisterska, Department of Scientific Computing, University of Salzburg, Austria, Styczeń 2001.
- [76] P. Meerwald, A. Uhl. Watermark security via wavelet filter parametrization. *International Conference on Image Processing*, wolumen 3, strony 1027–1030, 2001.
- [77] Y. Meyer. Principe d’incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d’opérateurs. *Séminaire Bourbaki*, 662:209–223, 1986.
- [78] Z. Michalewicz. *Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne*. WNT, Warszawa, 2003.
- [79] A. Miyazaki. On the evaluation of wavelet filter banks for wavelet-based image watermarking. *Proceedings of the 3rd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis, 2003. ISPA 2003.*, wolumen 2, strony 877–882, 2003.
- [80] A. Miyazaki. A study on the best wavelet filter bank problem in the wavelet-based image watermarking. *18th European Conference on Circuit Theory and Design, 2007. ECCTD 2007.*, strony 184–187, Sierpień 2007.
- [81] M. Nakamoto, S. Fujimoto, A. Doi, T. Hinamoto. Genetic algorithm approach for wavelet-based image watermarking. *9th International Conference on Signal Processing, 2008. ICSP 2008.*, strony 5–8, Pa/xdziernik 2008.
- [82] J. E. Odegard, C. S. Burrus. New class of wavelets for signal approximation. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, Maj 1996.
- [83] J. E. Odegard, C. S. Burrus. Smooth biorthogonal wavelets for applications in image compression. *IEEE Digital Signal Processing Workshop Proceedings*, strony 73–76, Wrzesień 1996.
- [84] J. E. Odegard, C. S. Burrus. Toward a new measure of smoothness for the design of wavelet bases. *Proceedings of the International Conference on*

- Acoustics, Speech, and Signal Processing*, wolumen 3, strony 1467–1470, Maj 1996.
- [85] S. Osowski. Signal flow graphs and neural networks. *Biological Cybernetics*, 70(4):387–395, Luty 1994.
- [86] S. Osowski. *Sieci neuronowe do przetwarzania informacji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, wydanie 2nd, 2006.
- [87] S. Osowski, A. Cichocki. Application of SFG in learning algorithms of neural networks. *International Workshop on Neural Networks for Identification, Control, Robotics, and Signal/Image Processing*, strony 75–83, Sierpień 1996.
- [88] S. Osowski, A. Cichocki. Learning in dynamic neural networks using signal flow graphs. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 27(2):209–228, 1999.
- [89] D. Pollen. $SU_I(2, F[z, 1/z])$ for F a subfield of C . *Journal of The American Mathematical Society*, 3(3):611–624, Lipiec 1990.
- [90] D. Puchała. *Szybkie algorytmy adaptacyjne przekształceń trygonometrycznych*. Praca doktorska, Politechnika Łódzka, 2008.
- [91] D. Puchała, M. Yatsymirskyy. Fast adaptive algorithm for two-dimensional Fourier transform. *Przegląd Elektrotechniczny*, 83(10):43–46, 2007.
- [92] G. Regensburger. Parametrizing compactly supported orthonormal wavelets by discrete moments. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 18(6):583–601, Grudzień 2007.
- [93] P. Rieder, J. Götze, J. S. Nossek, C. S. Burrus. Parameterization of orthogonal wavelet transforms and their implementation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 45(2):217–226, Luty 1998.
- [94] S. Roche, J.-L. Dugelay. Image watermarking based on the fractal transform. *Workshop on Multimedia Signal Processing*, strony 358–363, California, Grudzień 1998. IEEE.

- [95] A. Said, W. A. Pearlman. A new fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 6(3):243–250, Czerwiec 1996.
- [96] J. Schneid, S. Pittner. On the parametrization of the coefficients of dilation equations for compactly supported wavelets. *Computing*, 51(2):165–173, 1993.
- [97] C. V. Serdean, M. A. Ambroze, M. Tomlinson, J. G. Wade. DWT-based high-capacity blind video watermarking, invariant to geometrical attacks. *IEE Proceedings on Vision, Image and Signal Processing*, 150(1):51–58, Luty 2003.
- [98] J. M. Shapiro. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3445–3462, Grudzień 1993.
- [99] C.-S. Shieh, H.-C. Huang, F.-H. Wang, J.-S. Pan. Genetic watermarking based on transform-domain techniques. *Pattern Recognition*, 37:555–565, 2004.
- [100] F. Y. Shih. *Digital watermarking and steganography. Fundamentals and techniques*. CRC Press, 2008.
- [101] W. Skarbek, redaktor. *Multimedia. Algorytmy i standardy kompresji*. Akademicka Oficyna Wydawnicza, 1998.
- [102] P. Steffen, P. N. Heller, R. A. Gopinath, C. S. Burrus. Theory of regular M-band wavelet bases. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3497–3511, Grudzień 1993.
- [103] J. Stolarek. Realization of Daubechies transform using lattice structure. *The Collection of Scientific Works of ISDMCI 2009*, wolumen 2, strony 188–192, 2009.
- [104] J. Stolarek. Synthesis of a wavelet transform using neural network. *XI International PhD Workshop OWD, Conference Archives PTETiS*, wolumen 26, strony 71–74, 2009.

-
- [105] J. Stolarek. Adaptive synthesis of a wavelet transform using fast neural network. *Bulletin Of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, 59(1), Marzec 2011.
- [106] J. Stolarek, M. Yatsymirskyy. Fast neural network for synthesis and implementation of orthogonal wavelet transform. *Image Processing & Communications Challenges*, strony 87–94. AOW EXIT, 2009.
- [107] W. Sweldens. The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet constructions. *Wavelet Applications in Signal and Image Processing III*, strony 68–79, 1995.
- [108] W. Sweldens. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3(2):186–200, Kwiecień 1996.
- [109] W. Sweldens. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29(2), Marzec 1998.
- [110] D. Taubman. High performance scalable image compression with EBCOT. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(7):1158–1170, Lipiec 2000.
- [111] R. Tay, J. P. Havlicek. Image watermarking using wavelets. *The 45th Midwest Symposium on Circuits and Systems. MWSCAS-2002.*, wolumen 3, strony 258–261, Sierpień 2002.
- [112] A. H. Tewfik, D. Sinha, P. Jorgensen. On the optimal choice of a wavelet for signal representation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):747–765, Marzec 1992.
- [113] T. Traczyk, M. Mączyński. *Matematyka stosowana w inżynierii chemicznej*. WNT, Warszawa, 1970.
- [114] M. Unser. On the optimality of ideal filters for pyramid and wavelet signal approximation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3591–3596, Grudzień 1993.
- [115] I. Usman, A. Khan, R. Chamlawi, A. Majid. Image authenticity and perceptual optimization via genetic algorithm and a dependence neighborhood.

- International Journal of Mathematical and Computer Sciences*, 4(1):37–42, 2008.
- [116] P. P. Vaidyanathan. Passive cascaded-lattice structures for low-sensitivity FIR filter design, with applications to filter banks. *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, 33(11):1045–1064, Listopad 1986.
- [117] P. P. Vaidyanathan. Theory and design of M-channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary M, having the perfect reconstruction property. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 35:476–492, Kwiecień 1987.
- [118] P. P. Vaidyanathan, P.-Q. Hoang. Lattice structures for optimal design and robust implementation of two-channel perfect-reconstruction QMF banks. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 36(1):81–94, Styczeń 1988.
- [119] P. J. Van Fleet. *Discrete wavelet transformations: An elementary approach with applications*. Wiley, 2008.
- [120] M. Vetterli. Filter bank allowing perfect reconstruction. *Signal Processing*, 10(3):219–266, Kwiecień 1986.
- [121] M. Vetterli, C. Herley. Wavelets and filter banks: theory and design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(9):2207–2232, Wrzesień 1992.
- [122] J. D. Villasenor, B. Belzer, J. Liao. Wavelet filter evaluation for image compression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(8):1053–1060, Sierpień 1995.
- [123] J. E. Volder. The CORDIC trigonometric computing technique. *IRE Transactions on Electronic Computers*, EC-8:330–334, 1959.
- [124] S. Voloshynovskiy, S. Pereira, V. Iquise, T. Pun. Attack modelling: towards a second generation watermarking benchmark. *Signal Processing*, 81(6):1177–1214, Czerwiec 2001.
- [125] S. Voloshynovskiy, S. Pereira, T. Pun, J. J. Eggers, J.K. Su. Attacks on digital watermarks: Classification, estimation based attacks and benchmarks. *IEEE Communications Magazine*, 39(8):118–126, Sierpień 2001.

-
- [126] J. S. Walker. *A primer on wavelets and their scientific applications*. Chapman & Hall/CRC, wydanie 2nd, 2008.
- [127] Y. Wang, J. F. Doherty, R. E. Van Dyck. A wavelet-based watermarking algorithm for ownership verification of digital images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11(2):77–88, Luty 2002.
- [128] Z. Wang, A. C. Bovik. A universal image quality index. *IEEE Signal Processing Letters*, 9(3):81–84, Marzec 2002.
- [129] Z. Wang, A. C. Bovik. *Modern image quality assesment*. Morgan & Claypool, 2006.
- [130] D. Wei, A. C. Bovik. Generalized coiflets with nonzero-centered vanishing moments. *IEEE Transaction on Circuits and Systems II*, 45(8):998–1001, Sierpień 1998.
- [131] D. Wei, A. C. Bovik, B.L. Evans. Generalized Coiflets: a new family of orthonormal wavelets. *Record of the Thirty-First Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers*, wolumen 2, strony 1259–1263, Listopad 1997.
- [132] M. V. Wickerhauser. *Adapted wavelet analysis from theory to software*. A K Peters, 1994.
- [133] G. Xin-ke, L. Ran-ni. Study on algorithm of digital image watermarking based on DWT. *2011 Third International Workshop on Education Technology and Computer Science*, 2011.
- [134] J. Yang, Q. Wen, G. Cheng. A watermarking scheme based on median filtering. *International Conference on Computational Intelligence and Security, 2008. CIS '08*, wolumen 2, strony 378–381, Grudzień 2008.
- [135] M. Yatsymirskyy. Lattice structures for synthesis and implementation of wavelet transforms. *Journal of Applied Computer Science*, 17(1):133–141, 2009.
- [136] T. P. Zieliński. *Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. Antykwa, Kraków, 2002.

- [137] E. Zitzler, M. Laumanns, S. Bleuler. A tutorial on evolutionary multiobjective optimization. *Metaheuristics for Multiobjective Optimisation*, strony 3–38. Springer-Verlag, 2003.

Dodatek A

Realizacja macierzowa przekształcenia falkowego

Z równania (2.30) widać, że dyskretne przekształcenie falkowe jest przekształceniem liniowym. Oznacza to, że jeden etap przekształcenia falkowego może zostać zapisany w postaci macierzowej:

$$\mathbf{y} = H^{(L)} \cdot \mathbf{x} , \quad (\text{A.1})$$

gdzie $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$ to transformowany sygnał o długości N , $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]^T$ to sygnał po transformacji falkowej, a $H^{(L)}$ to macierz przekształcenia o wymiarach $N \times N$:

$$H^{(L)} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{L-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_0 & g_1 & g_2 & \dots & g_{L-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & \dots & h_{L-3} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & \dots & g_{L-3} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_4 & h_5 & h_6 & \dots & 0 & \dots & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ g_4 & g_5 & g_6 & \dots & 0 & \dots & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & h_0 & h_1 \\ g_2 & g_3 & g_4 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & g_0 & g_1 \end{bmatrix} . \quad (\text{A.2})$$

Macierz przekształcenia powstaje poprzez umieszczenie w pierwszym wierszu współczynników filtra dolnoprzepustowego $\mathbf{h}$ i dopełnienie tego wiersza zerami, zaś w drugim wierszu współczynników filtra górnoprzepustowego $\mathbf{g}$ i dopełnienie tego

wiersza zerami. Kolejne wiersze macierzy $H^{(L)}$ powstają poprzez $N/2$ -krotne skopiowanie dwóch wcześniejszych wierszy i ich cykliczne przesunięcie o 2. Cykliczność przesunięcia uwidacznia się w dolnych wierszach macierzy, gdzie końcowe współczynniki filtru zostają umieszczone ponownie w pierwszych kolumnach. Wynika to z przyjętego w punkcie 2.4.1 założenia o okresowości transformowanego sygnału $\mathbf{x}$.

Jeśli jednak jako rozwiązanie zagadnienia problemu brzegowego przyjmie się uzupełnienie zerami, to macierz H przyjmuje postać następującej macierzy wstęgowej:

$$H^{(L)} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{L-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_0 & g_1 & g_2 & \dots & g_{L-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & \dots & h_{L-3} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & \dots & g_{L-3} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & h_0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & g_0 & g_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

W przypadku lustrzanego odbicia sygnału na jego końcu, macierz $H^{(L)}$ przyjmie następującą postać (dla przejrzystości pokazano tylko prawy dolny róg macierzy, gdyż tylko on ulega zmianie):

$$H^{(L)} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & h_0 + h_7 & h_1 + h_6 & h_2 + h_5 & h_3 + h_4 \\ \dots & g_0 + g_7 & g_1 + g_6 & g_2 + g_5 & g_3 + g_4 \\ \dots & h_5 & h_4 & h_0 + h_3 & h_1 + h_2 \\ \dots & g_5 & g_4 & g_0 + g_3 & g_1 + g_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Z równań (A.1) i (A.2) widać, że w przetransformowanym sygnale $\mathbf{y}$, elementy $y_0, y_2, \dots, y_{N-2}$ odpowiadają współczynnikom dolnoprzepustowym rozwinięcia falkowego ($c_{j-1,l}$ w równaniu (2.30) ze strony 26), natomiast elementy $y_1, y_3, \dots, y_{N-1}$ odpowiadają współczynnikom górnoprzepustowym rozwinięcia falkowego ($d_{j-1,l}$ w równaniu (2.30)). Należy tutaj zauważyć, że podana postać macierzy przekształcenia obejmuje operację decymacji sygnałów wyjściowych – umieszczenie współczynników filtru $\mathbf{h}$ w co drugim wierszu macierzy i ich przesuwanie co

2 elementy sygnału odpowiada obliczaniu tylko niedecymowanych próbek sygnału wychodzących z dolnoprzepustowego filtra analizy. Analogicznie sytuacja ma się ze współczynnikami filtra $\mathbf{g}$.

W literaturze z reguły spotyka się macierz przekształcenia, w której górnej połowie umieszczane są współczynniki filtra dolnoprzepustowego, zaś w dolnej połowie współczynniki filtra górnoprzepustowego. Prowadzi to do otrzymania przekształconego wektora $\mathbf{y}$, którego pierwsza połowa zawiera współczynniki dolnoprzepustowe rozwinięcia falkowego, a druga połowa współczynniki górnoprzepustowe. Autor zdecydował się na zastosowanie przeplotu ze względu na wykorzystanie struktury kratowej jako metody parametryzacji falek. Jak zostanie pokazane w Rozdziale 3, w wyniku użycia struktury kratowej otrzymuje się w wektorze wyjściowym ułożone na zmianę współczynniki dolno i górnoprzepustowe.

Aby zrealizować odwrotne przekształcenie falkowe, należy znaleźć macierz odwrotną do macierzy przekształcenia $H^{(L)}$:

$$\tilde{H}^{(L)}\mathbf{y} = \left(H^{(L)}\right)^{-1}\mathbf{y} = \left(H^{(L)}\right)^{-1}H^{(L)}\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad , \quad (\text{A.5})$$

gdzie I to macierz jednostkowa. Z równań (2.60), (2.61) oraz (2.65) w sposób bezpośredni wynika, że macierzą odwrotną do macierzy zdefiniowanej równaniem (A.2) jest jej transpozycja:

$$\left(H^{(L)}\right)^{-1} = \left(H^{(L)}\right)^T \quad . \quad (\text{A.6})$$

Należy tutaj wyjaśnić, że wiersze transponowanej macierzy nie są tożsame ze współczynnikami filtrów syntezy $\tilde{\mathbf{h}}$ i $\tilde{\mathbf{g}}$. Jak już zostało powiedziane wcześniej, filtry syntezy są odbitymi lustrzanie filtrami analizy (patrz równania (2.56), (2.57) i (2.58)), podczas rekonstrukcji sygnału dokonywane jest wstawienie zer między każde dwie próbki sygnałów wchodzących do filtrów syntezy, a rekonstrukcja kończy się zsumowaniem sygnałów wychodzących z obu gałęzi banku filtrów (Rysunek 2.5). Te wszystkie fakty znajdują odbicie w transponowanej macierzy przekształcenia prostego: współczynniki filtrów analizy ułożone są w wierszach od tyłu, kolejne wiersze zawierają na zmianę parzyste bądź nieparzyste współczynniki filtrów (odpowiednik wstawiania zera między co drugą próbkę rekonstruowanego sygnału), a każdy wiersz zawiera zarówno współczynniki filtra $\mathbf{h}$ jak i $\mathbf{g}$ (odpowiednik zsumowania sygnałów wychodzących z obu filtrów).

A.1 Struktura kratowa a macierzowa realizacja przekształcenia falkowego

W niniejszym podrozdziale zostanie pokazane, że schemat obliczeniowy struktury kratowej może zostać zapisany w postaci macierzowej oraz że jest on tożsamy – z dokładnością do cyklicznego przesunięcia sygnału wynikowego – z realizacją macierzową daną równaniem (A.1).

Rozważmy dwupunktowe przekształcenie falkowe. Korzystając z definicji macierzy przekształcenia danej równaniem (A.2) oraz równań (3.19) i (3.20), można zapisać macierz przekształcenia dwupunktowego:

$$H^{(2)} = W_1 = \begin{bmatrix} w_{11}^{(1)} & w_{12}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ w_{21}^{(1)} & w_{22}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{11}^{(1)} & w_{12}^{(1)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{21}^{(1)} & w_{22}^{(1)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_{11}^{(1)} & w_{12}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_{21}^{(1)} & w_{22}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Przekształcając sygnał $\mathbf{x}$ przy użyciu tej macierzy otrzymujemy:

$$\mathbf{y}^{(1)} = W_1 \cdot \mathbf{x} = W_1 \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 w_{11}^{(1)} + x_1 w_{12}^{(1)} \\ x_0 w_{21}^{(1)} + x_1 w_{22}^{(1)} \\ x_2 w_{11}^{(1)} + x_3 w_{12}^{(1)} \\ x_2 w_{21}^{(1)} + x_3 w_{22}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{N-1} w_{11}^{(1)} + x_N w_{12}^{(1)} \\ x_{N-1} w_{21}^{(1)} + x_N w_{22}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Zrealizujemy teraz czteropunktowe przekształcenie falkowe. Macierz takiego przekształcenia dana jest wzorem:

$$H^{(4)} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_1 & g_2 & g_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_0 & h_1 \\ g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & g_0 & g_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

przy czym, zgodnie z równaniami (3.23) i (3.24), współczynniki filtrów dolno i górnoprzepustowego zależą od parametrów struktury kratowej w następujący sposób:

$$\begin{aligned} h_0 &= w_{21}^{(1)} w_{11}^{(2)} & h_1 &= w_{22}^{(1)} w_{11}^{(2)} & h_2 &= w_{11}^{(1)} w_{12}^{(2)} & h_3 &= w_{12}^{(1)} w_{12}^{(2)} \\ g_0 &= w_{21}^{(1)} w_{21}^{(2)} & g_1 &= w_{22}^{(1)} w_{21}^{(2)} & g_2 &= w_{11}^{(1)} w_{22}^{(2)} & g_3 &= w_{12}^{(1)} w_{22}^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

W celu wykonania przekształcenia należy pomnożyć sygnał $\mathbf{x}$ przez macierz $H^{(4)}$. Analizując rekurencyjną zależność wyrażoną równaniem (3.29) zauważa się, że można wykonać przekształcenie czteropunktowe korzystając z wyniku wcześniejszego przekształcenia dwupunktowego. W tym celu należy zapisać macierz reprezentującą drugą warstwę struktury kratowej:

$$W_2 = \begin{bmatrix} w_{22}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & w_{21}^{(2)} \\ 0 & w_{11}^{(2)} & w_{12}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{21}^{(2)} & w_{22}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{11}^{(2)} & w_{12}^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{21}^{(2)} & w_{22}^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_{11}^{(2)} & w_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_{21}^{(2)} & w_{22}^{(2)} & 0 \\ w_{12}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & w_{11}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

a następnie pomnożyć tą macierz z sygnałem $\mathbf{y}^{(1)}$, będącym wynikiem mnożenia wyrażonego równaniem (A.8):

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{(2)} &= W_2 \cdot \mathbf{y}^{(1)} = W_2 \cdot W_1 \cdot X = \\
&= \begin{bmatrix} (x_{N-2}w_{21}^{(1)} + x_{N-1}w_{22}^{(1)})w_{21}^{(2)} + (x_0w_{11}^{(1)} + x_1w_{12}^{(1)})w_{22}^{(2)} \\ (x_0w_{21}^{(1)} + x_1w_{22}^{(1)})w_{11}^{(2)} + (x_2w_{11}^{(1)} + x_3w_{12}^{(1)})w_{12}^{(2)} \\ (x_0w_{21}^{(1)} + x_1w_{22}^{(1)})w_{21}^{(2)} + (x_2w_{11}^{(1)} + x_3w_{12}^{(1)})w_{22}^{(2)} \\ \vdots \\ (x_{N-4}w_{21}^{(1)} + x_{N-3}w_{22}^{(1)})w_{11}^{(2)} + (x_{N-2}w_{11}^{(1)} + x_{N-1}w_{12}^{(1)})w_{12}^{(2)} \\ (x_{N-4}w_{21}^{(1)} + x_{N-3}w_{22}^{(1)})w_{21}^{(2)} + (x_{N-2}w_{11}^{(1)} + x_{N-1}w_{12}^{(1)})w_{22}^{(2)} \\ (x_{N-2}w_{21}^{(1)} + x_{N-1}w_{22}^{(1)})w_{11}^{(2)} + (x_0w_{11}^{(1)} + x_1w_{12}^{(1)})w_{12}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

Otrzymany w ten sposób wynik jest identyczny z wynikiem uzyskanym przez pomnożenie macierzy $H^{(4)}$ i $\mathbf{x}$, z dokładnością do cyklicznego przesunięcia sygnału (w tym wypadku sygnał wyjściowy jest przesunięty o 1). Ponieważ mnożenie macierzy jest łączne, można najpierw wymnożyć macierze W_2 i W_1 , reprezentujące kolejne warstwy struktury kratowej, aby otrzymać jedną macierz przekształcenia:

$$\begin{aligned}
W^{(4)} &= W_2 \cdot W_1 = \\
&= \begin{bmatrix} g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & g_0 & g_1 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_1 & g_2 & g_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_0 & h_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

gdzie współczynniki h_0 , h_1 , h_2 i h_3 filtru dolnoprzepustowego oraz współczynniki g_0 , g_1 , g_2 i g_3 filtru górnoprzepustowego są zdefiniowane równaniem (A.10). W stosunku do macierzy przekształcenia danej równaniem (A.2) nastąpiło cykliczne przesunięcie wszystkich wierszy macierzy o 1 w dół (dolny wiersz stał się górnym).

Uogólniając, macierz przekształcenia L -punktowego, realizowanego przy użyciu struktury kratowej obliczana jest poprzez wymnożenie macierzy reprezentujących poszczególne warstwy struktury kratowej:

$$W^{(L)} = W_{L/2} \cdot \dots \cdot W_1 , \quad (\text{A.14})$$

przy czym dla warstw nieparzystych macierz W_l określona jest jako:

$$W_l = \begin{bmatrix} w_{11}^{(l)} & w_{12}^{(l)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ w_{21}^{(l)} & w_{22}^{(l)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{11}^{(l)} & w_{12}^{(l)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{21}^{(l)} & w_{22}^{(l)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_{11}^{(l)} & w_{12}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_{21}^{(l)} & w_{22}^{(l)} \end{bmatrix} , \quad (\text{A.15})$$

natomiast dla warstw parzystych określona jest jako:

$$W_l = \begin{bmatrix} w_{22}^{(l)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & w_{21}^{(l)} \\ 0 & w_{11}^{(l)} & w_{12}^{(l)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{21}^{(l)} & w_{22}^{(l)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{11}^{(l)} & w_{12}^{(l)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{21}^{(l)} & w_{22}^{(l)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_{11}^{(l)} & w_{12}^{(l)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w_{21}^{(l)} & w_{22}^{(l)} & 0 \\ w_{12}^{(l)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & w_{11}^{(l)} \end{bmatrix} . \quad (\text{A.16})$$

Macierz $W^{(L)}$ powstaje z macierzy $H^{(L)}$ poprzez cykliczne przesunięcie w dół $\frac{L}{2} - 1$ wierszy. Przesunięcie to odpowiada cyklicznemu przesunięciu sygnału powstającemu w wyniku realizacji przekształcenia falkowego przy użyciu struktury kratowej.